ANNÉE 2016/2017	DEVOIR SURVEILLÉ 1	Prof SALIM 2ÈME BIOF SC. MATHS.

Problème :

On considère la fonction f définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = 4\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right); x > 1 \\ f(1) = \pi \\ f(x) = \pi + \sqrt[3]{1-x^3} \qquad ; x < 1 \end{cases}$$

1 I) Etudier la continuité de f en 1.

II) 1-Calculer $\lim_{+\infty} f(x)$.

1 2-Calculer $\lim_{-\infty} f(x)$ et $\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis montrer que $\lim_{-\infty}(f(x) + x) = \pi$.

2 3-Interpréter graphiquement ces résultats.

0.5 III) 1-Montrer que : $\left(\forall\beta \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \frac{1+sin\beta}{cos\beta} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)}$.

0.5 2-Montrer que $(\forall x \in]1;+\infty[\,)\ \left(\exists!\,\alpha \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[\right) \quad \sqrt{x-1} = \tan\alpha$.

1 3-Déduire que : $(\forall x \in]1;+\infty[\,)\ f(x) = \pi - 2arctan\left(\sqrt{x-1}\right)$.

2 IV) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite de 1 puis interpréter graphiquement ces résultats.

2 V) Etudier la monotonie de f sur $]-\infty;1[$ et $]1;+\infty[$.

1 VI) Etudier la concavité de f sur $]-\infty;1[$.

VII) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty;1[$

1 1-Montrer que g est une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

1 2-Donner l'expression de $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2 VIII) Représenter graphiquement dans le même repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ les deux courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_{g^{-1}}\right)$.

2 **Exercice :**

Montrer que l'équation (E): $2\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$ admet une unique solution α dans l'intervalle$[0;1]$, puis donner un encadrement de α à 5.10^{-1}près.

1 **la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction** **Bonne Chance**