الثانية بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الإمتحان الوطني الموحد الدورة العادية 10 / 06 / 2005	الأستاذ : الحيان

التمرين 1 :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2;\quad \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad (a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{ay+bx}{2}\right)$$

$$E=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2/m\in\mathbb{R}^*\right\}$$

1) ليكن $X(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ و $X(n)=\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من المجموعة E ؛ إذن $m\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{R}^*$.

لدينا :

$$X(m)*X(n)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)+\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)}{2},\frac{\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n-\frac{1}{n}\right)+\left(m-\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{mn+\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}+mn-\frac{m}{n}-\frac{n}{m}+\frac{1}{mn}}{2},\frac{mn-\frac{m}{n}+\frac{n}{m}-\frac{1}{mn}+mn+\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-\frac{1}{mn}}{2}\right)$$

$$=\left(mn+\frac{1}{mn},mn-\frac{1}{mn}\right)$$

$$\boxed{X(m)*X(n)=X(mn)}$$

وبما أن $m\in\mathbb{R}^*$ و $n\in\mathbb{R}^*$, فإن $mn\in\mathbb{R}^*$. وعليه فإن : $X(m)*X(n)\in E$.

وبالتالي فإن : $\forall(X,Y)\in E^2;X*Y\in E$. إذن * قانون داخلي في المجموعة E .

2) لدينا : $\varphi:\ \mathbb{R}^*\to E$; $m\mapsto\varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$.

أ)

i . ليكن $(m,n)\in\mathbb{R}^{*2}$, لدينا : $\varphi(mn)=\left(mn+\frac{1}{mn},mn-\frac{1}{mn}\right)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)*\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)=\varphi(m)*\varphi(n)$

إذن φ تشاكل من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$. $\boxed{\forall(m,n)\in\mathbb{R}^{*2}:\quad\varphi(mn)=\varphi(m)*\varphi(n)}$

ii . ليكن $X\in E$, إذن: $\exists!m\in\mathbb{R}^*/X=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ ؛ ومنه $\exists!m\in\mathbb{R}^*/X=\varphi(m)$ ؛ وعليه فإن φ تقابل من $\mathbb{R}^*$ نحو E

وبالتالي فإن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

ب) بما أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$ وأن $(\mathbb{R}^*,\times)$ زمرة تبادلية , فإن $(E,*)$ زمرة تبادلية .

لدينا 1 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون $\times$ في $(\mathbb{R}^*,\times)$, ومنه فإن العنصر المحايد بالنسبة للقانون * في $(E,*)$ هو : $\boxed{\varphi(1)=(2,0)}$.

ليكن $\varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ عنصرا من E . مماثل $\varphi(m)$ بالنسبة للقانون * في $(E,*)$ هو :

$$\boxed{(\varphi(m))'=\varphi(m^{-1})=\varphi\left(\frac{1}{m}\right)=\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{\frac{1}{m}},\frac{1}{m}-\frac{1}{\frac{1}{m}}\right)=\left(\frac{1}{m}+m,\frac{1}{m}-m\right)}\ .\quad\left(m\neq0\Rightarrow\frac{1}{m}\neq0\right)$$

3) نعتبر المجموعة : $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x\geq2 \text{ و } y^2=x^2-4\right\}$

أ) نضع : $G=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m>0\right\}$. لنبين أن : $F=G$ ؟

$\underline{G\subset F}$: ليكن $X=\left(m+\frac{1}{m}m-\frac{1}{m}\right)\in G$, إذن $m>0$. لدينا :

$$\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-4=m^2+2+\frac{1}{m^2}-4=m^2-2+\frac{1}{m^2}=\left(m-\frac{1}{m}\right)^2 .$$

تذكير : $\boxed{\forall(a,b)\in\mathbb{R}^{+^2} :\quad a+b\ge 2\sqrt{ab}}$. تطبيق : $m+\frac{1}{m}\ge 2\sqrt{m\times\frac{1}{m}}\Rightarrow \boxed{m+\frac{1}{m}\ge 2}$

وبناءا على ما سبق نجد : $X\in F$. ومنه نستنتج أن $G\subset F$.

$\underline{F\subset G}$: ليكن $(x,y)\in F$, إذن : $x\ge 2$ و $y^2=x^2-4$. نبحث عن $m>0$ بحيث : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ ؟

$$(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m+\frac{1}{m}=x\\ m-\frac{1}{m}=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2m=x+y\\ \frac{2}{m}=x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{x+y}{2}\\ m=\frac{2}{x-y}\end{cases}$$

ونعلم أن : (لأن $x\ne y$) $y^2=x^2-4\Rightarrow x^2-y^2=4\Rightarrow(x+y)(x-y)=4\Rightarrow\frac{x+y}{2}=\frac{2}{x-y}$

من أجل $m=\frac{x+y}{2}$, لدينا : $(x,y)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$. لنبين أن : $m>0$ ؟

لدينا $(x+y)(x-y)=4>0$, إذن $x+y$ و $x-y$ لهما نفس الإشارة . ولدينا $x\ge 2>0$. إذن :

$y\ge 0\Rightarrow x+y\ge x>0$ و $y\le 0\Rightarrow -y\ge 0\Rightarrow x-y\ge x>0\Rightarrow x+y>0$. ومنه فإن : $m=\frac{x+y}{2}>0$.

إذن $(x,y)\in G$. ومنه نجد : $F\subset G$.

وبالتالي فإن : $F=G$.

ب) لدينا : i. $F=\left\{\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2 / m>0\right\}\subset E$.

ii. $F\ne\varnothing$ لأن من أجل $m=1$, لدينا : $(2,0)\in F$.

iii. ليكن $X=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ و $Y=\left(n+\frac{1}{n},n-\frac{1}{n}\right)$ عنصرين من المجموعة F .إذن :

$X*Y'=\varphi(m)*\varphi(n)'=\varphi(m)*\varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m},\frac{m}{n}-\frac{n}{m}\right)$ و $\begin{cases}m>0\\ n>0\end{cases}\Rightarrow\frac{m}{n}>0$.

ومنه فإن : $X*Y'\in F$. $\boxed{\forall(X,Y)\in F^2 :\quad X*Y'\in F}$

وبالتالي فإن : $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين 2 :

$\boxed{I}$ p عدد صحيح طبيعي أولي و $p\ge 5$.

1) لدينا p أولي و $p\ge 5$ و 3 أولي إذن $3\wedge p=1$ (3 و p أوليان فيما بينهما) ومنه $3\wedge p^2=1$ وعليه فإن : $p\not\equiv 0[3]$.

ومنه نستنتج أن : $p\equiv 1[3]$ أو $p\equiv 2[3]$. ندرس هاتين الحالتين :

i . إذا كان $p\equiv 1[3]$, فإن : $p^2\equiv 1[3]$. ii . إذا كان $p\equiv 2[3]$, فإن : $p^2\equiv 4[3]$ إذن $p^2\equiv 1[3]$.

وبالتالي فإن : $\boxed{p^2\equiv 1[3]}$.

2) أ) لدينا p عدد صحيح طبيعي أولي و $p\ge 5$, إذن p عدد فردي ومنه $p=2q+1$ $\exists q\in\mathbb{Z}/$ ومنه

$p^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1=4q(q+1)+1$. إذن : $\boxed{p^2-1=4q(q+1)}$.

ب) لدينا q و $q+1$ عددان صحيحان طبيعيان متتابعان , إذن $q(q+1)$ عدد صحيح طبيعي زوجي. ومنه

$\exists k \in \mathbb{N} / \quad q(q+1)=2k$. إذن : $p^2-1=8k$. ومنه نجد : $p^2 \equiv 1[8]$.

3) خاصية : a و b و c أعداد نسبية . لدينا : $\begin{cases} a/c \\ b/c \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/c$

برهان : لدينا $a/c \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}/c=am$ و $b/c \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}/c=bn$ و $a \wedge b = 1 \overset{Bezout}{\Rightarrow} \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2 / au+bv=1$.

إذن : $c=cau+cbv=bnau+ambv=ab(nu+mv)$ ومنه نستنتج أن : ab/c .

ملاحظة : الخاصية ليست صحيحة إذا كان $a \wedge b \neq 1$. مثال مضاد : 2يقسم 12 و 4 يقسم 12 لكن $8=2\times 4$ لا يقسم 12 ؛ $2 \wedge 4 = 2$.

تطبيق : لدينا $p^2 \equiv 1[3]$ و $p^2 \equiv 1[8]$ إذن $3/(p^2-1)$ و $8/(p^2-1)$ و $3 \wedge 8 = 1$ إذن $24=3\times 8/(p^2-1)$ أي $\boxed{p^2 \equiv 1[24]}$

$\boxed{II}$ ليكن a عددا صحيحا طبيعيا حيث : $\boxed{a \wedge 24 = 1}$.

1) أ) لدينا $a \wedge 24 = 1$, إذن a عدد صحيح طبيعي فردي(لو كان a زوجيا لكان 2 قاسما مشتركا ل a و 24 وهذا يتناقض مع $a \wedge 24 = 1$)

ومنه نستنتج أن : $a^2 \equiv 1[8]$ (اتبع نفس خطوات السؤالين I -2- أ و I -2- ب) .

ولدينا $a \wedge 24 = 1$, إذن $a \not\equiv 0[3]$ (لو كان $a \equiv 0[3]$ لكان 3 قاسما مشتركا ل a و 24 وهذا يتناقض مع $a \wedge 24 = 1$) .

إذن $a \equiv 1[3]$ أو $a \equiv 2[3]$. إذن $a \equiv 1[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3]$ و $a \equiv 2[3] \Rightarrow a^2 \equiv 4[3] \Rightarrow a^2 \equiv 1[3]$.

لدينا $a^2 \equiv 1[8]$ و $a^2 \equiv 1[3]$ و $3 \wedge 8 = 1$ ؛ إذن : $\boxed{a^2 \equiv 1[24]}$.

ب) نفترض أنه توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k \in \{1,...,23\}: \quad a_k \wedge 24 = 1$

و $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2=23997$.

لدينا $\forall k \in \{1,...,23\}: \quad a_k \wedge 24 = 1$. إذن $\forall k \in \{1,...,23\}: \quad a_k^2 \equiv 1[24]$ ومنه فإن : $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2 \equiv 23[24]$

ولدينا $23997 \equiv 21[24]$. إذن : $23 \equiv 21[24]$ أي $2 \equiv 0[24]$ وهذا تناقض ! .

خلاصة : لا توجد أعداد صحيحة طبيعية a_1 و a_2 و ... و a_{23} حيث: $\forall k \in \{1,...,23\}: \quad a_k \wedge 24 = 1$

و $a_1^2+a_2^2+...+a_{23}^2=23997$.

التمرين 3 :

$\boxed{I}$ نعتبر f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=(x+2)e^{-\frac{2}{x}} \quad ; \quad x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

وليكن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة = 2cm) .

1) أ) نضع $X=-\frac{2}{x}$ إذن $x \to 0^+ \Rightarrow X \to -\infty$ ومنه: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to -\infty}\left(-\frac{2}{X}+2\right)e^X=0=f(0)$

لأن $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X=0$. وبالتالي فإن f متصلة على اليمين في النقطة 0 .

ب) نضع $X=-\frac{2}{x}$ إذن $x \to 0^+ \Rightarrow X \to -\infty$ ومنه :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x}e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to -\infty}(1-X)e^X=\lim\limits_{X\to -\infty} e^X-Xe^X=\boxed{0}$ لأن: $\lim\limits_{X\to -\infty} Xe^X=0$ و $\lim\limits_{X\to -\infty} e^X=0$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ولدينا $\boxed{f_d'(0)=0}$.

ج) ليكن $x \in]0,+\infty[$. لدينا:

$$f'(x)=\left((x+2)e^{-\frac{2}{x}}\right)'=(x+2)'e^{-\frac{2}{x}}+(x+2)\left(-\frac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}=\left(1+\frac{2}{x^2}(x+2)\right)e^{-\frac{2}{x}}=\frac{(x+1)^2+3}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}>0$$

إذن f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

2) أ) نضع $X=-\frac{2}{x}$. إذن $x \to +\infty \Rightarrow X \to 0^-$ ومنه: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)e^{-\frac{2}{x}}=\lim\limits_{X\to 0^-}(-2+2X)\frac{e^X}{X}=\boxed{+\infty}$

ب) نضع : $u(t)=e^{-t}+t-1$ و $v(t)=\frac{t^2}{2}$ لكل $t\in[0,+\infty[$.

لدينا u و v قابلتين للإشتقاق مرتين على المجال $[0,+\infty[$ و u' و v' متصلتين على المجال $[0,+\infty[$ ولدينا :

$u'(t)=-e^{-t}+1$ و $u''(t)=e^{-t}$ و $v'(t)=t$ و $v''(t)=1$ لكل $t\in[0,+\infty[$.

بما أن لكل $t\in[0,+\infty[$: $t\geq 0\Rightarrow -t\leq 0\Rightarrow 0\leq e^{-t}\leq 1\Rightarrow 0\leq u''(t)\leq v''(t)$ ؛

فإن : $\forall x\geq 0: 0\leq \int_0^x u''(t)dt\leq \int_0^x v''(t)dt\Rightarrow 0\leq u'(x)\leq v'(x)$ لأن $u'(0)=v'(0)=0$.

ومنه فإن : $\forall t\geq 0: 0\leq \int_0^t u'(x)dx\leq \int_0^t v'(x)dx\Rightarrow 0\leq u(t)\leq v(t)$ لأن $u(0)=v(0)=0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall t\in[0,+\infty[:\quad 0\leq e^{-t}+t-1\leq \frac{t^2}{2}}$.

ج) ليكن $x>0$. لدينا $\frac{2}{x}>0$ وبتطبيق السؤال السابق , نجد : $0\leq e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}-1\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2\Rightarrow 0\leq e^{-\frac{2}{x}}+\frac{2}{x}-1\leq \frac{2}{x^2}$

$$\Rightarrow 1-\frac{2}{x}\leq e^{-\frac{2}{x}}\leq 1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(1-\frac{2}{x}\right)(x+2)\leq (x+2)e^{-\frac{2}{x}}\leq \left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)(x+2)$$

$$\Rightarrow x+2-2-\frac{4}{x}\leq f(x)\leq x+2-2-\frac{4}{x}+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}$$

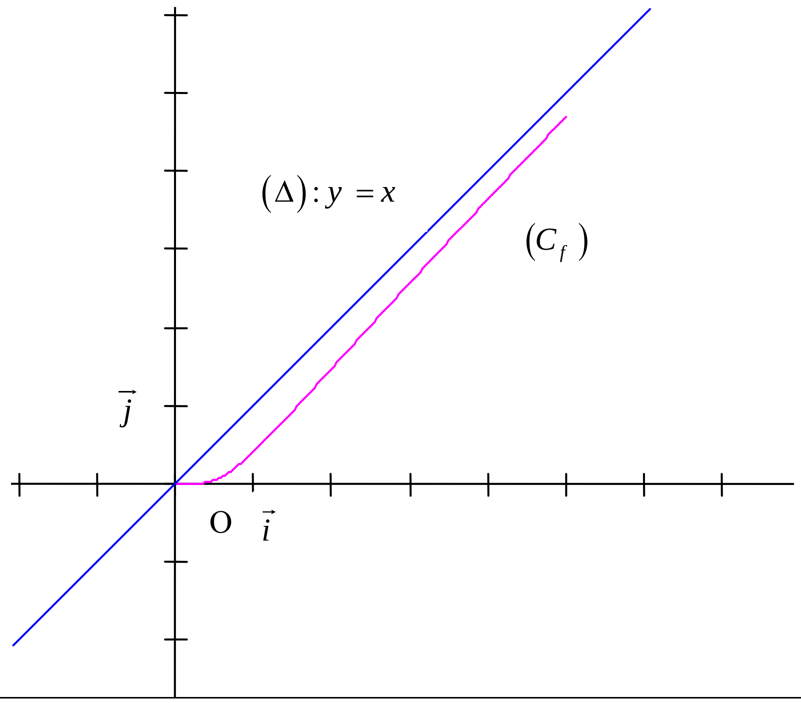
$$\Rightarrow x-\frac{4}{x}\leq f(x)\leq x+\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}}$$

د) لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ولدينا $\forall x>0: -\frac{4}{x}\leq f(x)-x\leq \frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}$ و $\lim_{x\to+\infty}-\frac{4}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}=0$.

إذن : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=0}$. ومنه نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مقاربا مائلا (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $\boxed{y=x}$.

3) إنشاء المنحنى (C_f) :



II ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و f_n الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(x + \dfrac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}} & ; \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1) نضع $X = -\dfrac{2}{x}$. إذن : $x \to 0^+ \Rightarrow X \to -\infty$ ومنه فإن :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f_n(x)-f_n(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{nx}\right)e^{-\frac{2}{x}} = \lim_{X\to-\infty}\left(1-\frac{X}{n}\right)e^{X} = \lim_{X\to-\infty} e^X - \frac{1}{n}Xe^X = \boxed{0}$$ لأن $\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$.

إذن f_n قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 ولدينا : $\boxed{(f_n')_d(0) = 0}$.

2) ليكن $x > 0$. لدينا: $f_n'(x) = \left(\left(x+\dfrac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}\right)' = \left(x+\dfrac{2}{n}\right)' e^{-\frac{2}{x}} + \left(x+\dfrac{2}{n}\right)\left(-\dfrac{2}{x}\right)' e^{-\frac{2}{x}} = \left(1+\left(x+\dfrac{2}{n}\right)\dfrac{2}{x^2}\right)e^{-\frac{2}{x}} > 0$

إذن f_n دالة تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

3) أ) لدينا f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ ؛ إذن f_n <u>تقابل</u> من المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $f_n(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$.

وبما أن $\dfrac{2}{n} \in]0,+\infty[$ ؛ فإن $\exists! a_n \in]0,+\infty[/ f_n(a_n) = \dfrac{2}{n}$.

ب) ليكن $x > 0$ و $n \in \mathbb{N}^*$. لدينا :

$$\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)-\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right) = \left(\left(x+\frac{2}{n+1}\right)e^{-\frac{2}{x}}-\frac{2}{n+1}\right)-\left(\left(x+\frac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{x}}-\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}\right)\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)$$

إذن :

$$\left(f_{n+1}(x)-\frac{2}{n+1}\right)-\left(f_n(x)-\frac{2}{n}\right) = \boxed{-\frac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right)}$$

ومنه فإن : $x > 0 \Rightarrow -\dfrac{2}{x} < 0 \Rightarrow e^{-\frac{2}{x}} < 1 \Rightarrow -\dfrac{2}{n(n+1)}\left(e^{-\frac{2}{x}}-1\right) > 0$.

وبالتالي فإن : $\boxed{\forall x > 0; \quad \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad f_{n+1}(x)-\dfrac{2}{n+1} > f_n(x)-\dfrac{2}{n}}$.

ج) لدينا :

$$f_{n+1}(a_{n+1})-\frac{2}{n+1} > f_n(a_{n+1})-\frac{2}{n} \Rightarrow 0 > f_n(a_{n+1})-\frac{2}{n}$$ (لأن $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$)

$$\Rightarrow f_n(a_{n+1}) < \frac{2}{n}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < f_n^{-1}\left(\frac{2}{n}\right)$$ (لأن f_n تقابل من $[0,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$)

$$\Rightarrow \boxed{a_{n+1} < a_n}$$ (لأن $f_n(a_n) = \dfrac{2}{n}$)

وبالتالي فإن $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متتالية تناقصية ؛ وبما أنها مصغورة بالعدد 0 ($\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_n > 0}$) ؛ فإنها متقاربة. نضع $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$

د) لدينا : $f_n(a_n) = \dfrac{2}{n} \Rightarrow \left(a_n+\dfrac{2}{n}\right)e^{-\frac{2}{a_n}} = \dfrac{2}{n} \Rightarrow a_n + \dfrac{2}{n} = \dfrac{2}{n}e^{\frac{2}{n}} \Rightarrow na_n + 2 = 2e^{\frac{2}{n}} \Rightarrow \boxed{na_n = 2e^{\frac{2}{n}} - 2}$.

هـ) لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad a_n > 0$. إذن $a = \lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$. نفترض أن $a \neq 0$ ؛ إذن : <u>$a > 0$</u> .

ولدينا : $\forall n \in \mathbb{N}^*: \quad na_n = 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2$ و $\lim_{n\to+\infty} na_n = +\infty$ لكن $\lim_{n\to+\infty} 2e^{\frac{2}{a_n}} - 2 = 2e^{\frac{2}{a}} - 2$. وهذا تناقض . وبالتالي فإن :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

III نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بمايلي : $\forall x \in [0,+\infty[: \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$.

1) أ) ليكن $x > 0$. لدينا f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ و $x \leq 2x$. إذن :

$\forall t \in [x,2x]: \quad x \le t \le 2x \Rightarrow f(x) \le f(t) \le f(2x)$. إذن : $f(x)\int_x^{2x} dt \le \int_x^{2x} f(t)dt \le f(2x)\int_x^{2x} dt$.

ومنه فإن : $\boxed{xf(x) \le F(x) \le xf(2x)}$ لكل $x > 0$.

ب) لدينا $\forall x > 0: \quad F(x) \ge xf(x)$ ولدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} xf(x) = +\infty$. ومنه نستنتج أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = \boxed{+\infty}$

2) أ) لدينا f متصلة على المجال $[0,+\infty[$. لتكن ψ دالة أصلية للدالة f على المجال $[0,+\infty[$. إذن :

$\forall x \in [0,+\infty[: \quad F(x) = \int_x^{2x} f(t)dt = \psi(2x) - \psi(x)$.

بما أن $x \mapsto 2x$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وتحول المجال $]0,+\infty[$ نحو المجال $]0,+\infty[$ وبما أن ψ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ؛ فإن $x \mapsto \psi(2x)$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. وبالتالي فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$.

ولدينا : $\left[\forall x > 0: \quad xf(x) \le F(x) \le xf(2x)\right] \Rightarrow \left[\forall x > 0: \quad f(x) \le \frac{F(x)}{x} \le f(2x)\right]$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ و

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(2x) = 0$ فإن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x} = 0$ إذن F قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و $\boxed{F'_d(0) = 0}$.

وبالتالي فإن F قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ب) حسب (أ) نعلم أن $F'_d(0) = 0$. ليكن $x > 0$. لدينا :

$$F'(x) = \left(\psi(2x) - \psi(x)\right)' = (2x)'\psi'(2x) - \psi'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2(2x+2)e^{-\frac{1}{x}} - (x+2)e^{-\frac{2}{x}}$$

$$F'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left[4(x+1)e^{\frac{1}{x}} - (x+2)\right] = e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - (x+2)e^{\frac{1}{x}} + 4(x+1)e^{\frac{1}{x}}\right]$$

ومنه فإن : $\boxed{F'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right]}$.

وبالتالي فإن :

$$\begin{cases} F'(x) = e^{-\frac{2}{x}}\left[(x+2)\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + (3x+2)e^{\frac{1}{x}}\right] & ; \quad x > 0 \\ F'_d(0) = 0 \end{cases}$$

3) لدينا : $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} > 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{x}} - 1 > 0$ و $(3x+2)e^{\frac{1}{x}} > 0$ و $x > 0 \Rightarrow x+2 > 0$.

إذن : $\forall x > 0: \quad F'(x) > 0$ ومنه فإن : F تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات الدالة F على المجال $[0,+\infty[$:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$F'(x)$	0 $\qquad\qquad$ $+$
$F(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

التمرين 4 :

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{-1\}: \quad f(z) = \frac{iz-1}{(z+1)^2}$$

1) أ) ليكن y عددا حقيقيا . لدينا :

$$\begin{aligned} f(iy) = iy \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{-y-1}{(iy+1)^2} = iy \\ &\Leftrightarrow \quad -y-1 = iy(-y^2+1+2iy) \\ &\Leftrightarrow \quad -y-1 = -2y^2 + iy(-y^2+1) \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -y-1 = -2y^2 \\ y(1-y)(1+y) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ (y=0) \vee (y=1) \vee (y=-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = 1$$

ب) لدينا :

$$f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{iz-1}{(z+1)^2} = z$$

$$\Leftrightarrow \quad iz - 1 = z(z^2 + 2z + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad iz - 1 = z^3 + 2z^2 + z$$

$$\Leftrightarrow \quad z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 = 0 : (*)$$

نعلم أن $f(i) = i$ إذن i حل للمعادلة $(*)$. ننجز القسمة الأقليدية ل $z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1$ على $z - i$ كمايلي :

$$\begin{array}{rl|l} & z^3 + 2z^2 + (1-i)z + 1 & z - i \\ \cline{3-3} \odot & \underline{z^3 - iz^2} & z^2 + (2+i)z + i \\ & (2+i)z^2 + (1-i)z + 1 & \\ \odot & \underline{(2+i)z^2 + (1-2i)z} & \\ & iz + 1 & \\ & \underline{iz + 1} & \\ & 00 & \end{array}$$

إذن :

$$f(z) = z \quad \Leftrightarrow \quad (z - i)\left(z^2 + (2+i)z + i\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = i \quad \vee \quad z^2 + (2+i)z + i = 0 : (**)$$

نحل المعادلة $(**)$: لدينا $\Delta = (2+i)^2 - 4i = 7 - 1 + 4i - 4i = 3 = \sqrt{3}^2$. إذن للمعادلة $(**)$ حلين هما :

$$z = \frac{-(2+i) - \sqrt{3}}{2} = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أو} \quad z = \frac{-(2+i) + \sqrt{3}}{2} = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة $f(z) = z$ في $\mathbb{C}$ هي : $S = \left\{ i, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\}$.

بما أن $\Re e(z_0) = 0$, فإن $\boxed{z_0 = i}$. وبماأن $\Re e(z_1) > \Re e(z_2)$ فإن $\boxed{z_1 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$ و $\boxed{z_2 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$.

2) أ) لدينا :

$$z_1 + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left[1, -\frac{\pi}{6}\right] = \left[1, -\frac{\pi}{6} + 2\pi\right] = \left[1, \frac{11\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{11\pi}{6}}}$$

و

$$z_2 + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\left[1, \frac{\pi}{6}\right] = \left[1, \frac{\pi}{6} + \pi\right] = \left[1, \frac{7\pi}{6}\right] = \boxed{e^{i\frac{7\pi}{6}}} .$$

ب) لدينا :

$$z_1 = -1 + e^{i\frac{11\pi}{6}} = e^{i\frac{11\pi}{12}}\left(-e^{-i\frac{11\pi}{12}} + e^{i\frac{11\pi}{12}}\right) = 2i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{11\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)e^{i\frac{17\pi}{12}}$$

و

$$z_2 = -1 + e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{i\frac{7\pi}{12}}\left(-e^{-i\frac{7\pi}{12}} + e^{i\frac{7\pi}{12}}\right) = 2i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{7\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}$$

لأن : $\boxed{e^{i\frac{\pi}{2}} = i}$. ولدينا :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

ومنه نجد : $z_1=2\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{17\pi}{12}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}}$ و $z_2=2\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{13\pi}{12}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{13\pi}{12}}}$.

3) نضع $z=e^{i\alpha}$ حيث : $0\le\alpha<\pi$.

أ) لدينا : $\boxed{\overline{z}=\frac{1}{z}}\Rightarrow z\overline{z}=1\Rightarrow |z|=1$. إذن : $\overline{f(z)}=\overline{\left(\frac{iz-1}{(z+1)^2}\right)}=\frac{-i\overline{z}-1}{(\overline{z}+1)^2}=\frac{-iz^2\overline{z}-z^2}{\left(z\overline{z}+z\right)^2}=\frac{-iz-z^2}{\left(1+z\right)^2}=-z\frac{i+z}{\left(1+z\right)^2}$

ومنه : $\boxed{\overline{f(z)}=iz\frac{iz-1}{\left(1+z\right)^2}=izf(z)}$.

ب) لدينا: $f(z)+\overline{f(z)}=0\Leftrightarrow izf(z)+f(z)=0\Leftrightarrow(iz+1)f(z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}iz+1=0\\f(z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=i\\ \frac{iz-1}{(z+1)^2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=i\\z=-i\end{cases}$

إذن : $f(z)+\overline{f(z)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}e^{i\alpha}=i\\e^{i\alpha}=-i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\\ \alpha\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}\Leftrightarrow\boxed{\alpha=\frac{\pi}{2}}$ (لأن $0\le\alpha<\pi$)

ج) لدينا:
$$f(z)=f(e^{i\alpha})=\frac{ie^{i\alpha}-1}{\left(e^{i\alpha}+1\right)^2}=\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\alpha}-1}{\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}}+e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\right)^2}=\frac{e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\left(e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-e^{-\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}\right)}{e^{i\alpha}\left(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2}$$

$$f(z)=e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-i\alpha}\frac{2i\sin\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)}{4\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{\frac{1}{2}i\left(\frac{\pi}{2}+\pi-\alpha\right)}=\boxed{\frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}e^{i\frac{3\pi-2\alpha}{4}}}$$

وذلك لأن: $0\le\alpha<\pi\Rightarrow0\le\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{\pi}{4}\le\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)>0$ و

$$0\le\alpha<\pi\Rightarrow0\le\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)>0$$

4) لدينا : $\begin{cases}z=e^{i\alpha}/0\le\alpha<2\pi\\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \Re e(f(z))=\frac{1}{2}\end{cases}$. ولدينا :

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\cos\left(\frac{3\pi-2\alpha}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi-2\alpha}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\cos(\alpha)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)-1\right)=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Leftrightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\alpha}{2}\equiv\pm\frac{\pi}{3}[2\pi]\\ \frac{\alpha}{2}\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$$

$$\Re e(f(z))=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\equiv\pm\frac{2\pi}{3}[4\pi]\\ \alpha\equiv\pm\frac{4\pi}{3}[4\pi]\end{cases}$$

ولدينا : $\alpha\equiv\frac{2\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$ و $\alpha\equiv-\frac{2\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\overline{j}$

و $\alpha\equiv\frac{4\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{i\frac{4\pi}{3}}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=\overline{j}$ و $\alpha\equiv-\frac{4\pi}{3}[4\pi]\Rightarrow z=e^{i\alpha}=e^{-i\frac{4\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=j$

وبالتالي فإن : $z=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ أو $z=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. $\boxed{S=\{j,\overline{j}\}}$

<u>طريقة أخرى</u> : لنحل النظمة التالية : $\begin{cases}|z|=1\\ \Re e\left(f(z)\right)=\frac{1}{2}\end{cases}$.

لدينا $|z|=1$. إذن حسب السؤال 3- أ - لدينا : $\overline{f(z)}=izf(z)$ ومنه نستنتج أن :

$$\begin{aligned}
\Re e\left(f(z)\right)=\frac{1}{2}\quad &\Leftrightarrow\quad f(z)+\overline{f(z)}=2\Re e\left(f(z)\right)=1\\
&\Leftrightarrow\quad f(z)+izf(z)=1\\
&\Leftrightarrow\quad (iz+1)f(z)=1\\
&\Leftrightarrow\quad (iz+1)\frac{iz-1}{(z+1)^2}=1\\
&\Leftrightarrow\quad (iz-1)(iz+1)=(z+1)^2\\
&\Leftrightarrow\quad -z^2-1=z^2+2z+1\\
&\Leftrightarrow\quad 2z^2+2z+2=0\\
&\Leftrightarrow\quad z^2+z+1=0\\
&\Leftrightarrow\quad \left(z=e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)\vee\left(z=e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)\\
&\Leftrightarrow\quad \left[z=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\vee\left[z=j^2=\overline{j}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن : $\boxed{S=\{j,\overline{j}\}}$.

<u>طريقة أخرى لإنجاز السؤال I – 1 من التمرين الثاني :</u>

نضع $m=p\left(p^2-1\right)$.لدينا: $m=p\left(p-1\right)\left(p+1\right)$. إذن m هو جداء ثلاثة أعداد متتابعة ؛ إذن : $3/m$ ومنه $3/p\left(p^2-1\right)$

وبما أن p أولي و $p\geq 5$ فإن $p>3$ و 3 لا يقسم p . إذن : $p\wedge 3=1$.

وعليه فإن : $\begin{cases}3/p\left(p^2-1\right)\\ p\wedge 3=1\end{cases}\overset{Gauss}{\Longrightarrow}3/\left(p^2-1\right)$. وهذا يعني أن : $\boxed{p^2\equiv 1[3]}$.

<u>طريقة أخرى لإنجاز السؤال II – 1 من التمرين الثاني :</u>

لدينا $a\wedge 24=1$ و $a\in\mathbb{N}$.

لنفكك a إلى جداء عوامل أولية : $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ حيث p_1 و p_2 و ... و p_r أعداد صحيحة طبيعية أولية و α_1 و α_2 و ... و α_r

أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة .

نعلم أن القواسم الأولية للعدد 24 هي 2 و 3 ($24=2^3\times 3$) . وبما أن $a\wedge 24=1$ فإن 2 و 3 لا يقسمان a . أي 2 و 3 لا يوجدان في تفكيك a . ومنه فإن الأعداد p_1 و p_2 و ... و p_r أعداد أولية أكبر قطعا من 3 . أي أكبر من أو يساوي 5 . وحسب I − 1 , لدينا :

$\forall i\in\{1,2,...,r\}\ :\ p_i\equiv 1[3]$ ومنه فإن :

$$a^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}=\left(p_1^2\right)^{\alpha_1}\left(p_2^2\right)^{\alpha_2}...\left(p_r^2\right)^{\alpha_r}\Rightarrow a^2\equiv 1^{\alpha_1}\times 1^{\alpha_2}\times ...\times 1^{\alpha_r}[3]$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2\equiv 1[3]}$$

نتيجة : العدد العقدي j يسمى عدد جاكوبي (Nombre de Jacobi) ويحقق ما يلي :

$\boxed{1+j+j^2=0}$ و $\boxed{j^3=1}$ و $\boxed{j^2=\bar{j}}$ و $\boxed{j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\left[1,\frac{2\pi}{3}\right]}$ $\boxed{j^4=j}$

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C}:\ \exists!(a,b)\in\mathbb{R}^2/\ \ z=a+bj}$$

الأعداد العقدية 1 و j و $\bar{j}$ هي الجذور الثالثة للوحدة وصورها في المستوى العقدي هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع .

*** انتهى ***

تمرين : لتكن a و b و c أعدادا من $\mathbb{N}^*$ بحيث : $ab=c^2$ و $a\wedge b=1$.

بين أن : $\exists(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/\ \ a=m^2$ و $b=n^2$ ؟

الجواب : نضع $d=a\wedge c$. إذن : $m\wedge n=1$ و $c=dn$ و $a=dm$ / $\exists(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$.

لدينا : $\boxed{bm=dn^2}\Leftrightarrow bdm=d^2n^2\Leftrightarrow ab=c^2$. ولدينا : $m\wedge n=1\Leftrightarrow m\wedge n^2=1$.

بما أن : $bm=dn^2$ فإن : $\begin{cases}n^2/bm\\ m\wedge n^2=1\end{cases}\overset{Gauss}{\Rightarrow}\boxed{n^2/b}:(i)$.

يكفي أن نبين أن : b/n^2 ؟

لدينا : $bm=n^2d$ إذن : b/n^2d . لهذا يكفي أن نبين أن : $b\wedge d=1$ ؟

نضع $\delta=b\wedge d$. لدينا : $\begin{cases}\delta/b\\ \delta/d\end{cases}$ و إذن : $\begin{cases}\delta/b\\ \delta/dm=a\end{cases}$ و ومنه فإن: $\delta/a\wedge b$. وبما أن $a\wedge b=1$ فإن: $\delta/1$ إذن

$\delta=1$. ومنه فإن: $\boxed{b\wedge d=1}$. وعليه فإن : $\begin{cases}b/dn^2\\ b\wedge d=1\end{cases}\overset{Gauss}{\Rightarrow}\boxed{b/n^2}:(ii)$.

من (i) و (ii) , نستنتج أن : $\boxed{b=n^2}$.

ولدينا : $\boxed{m=d}\Rightarrow n^2m=dn^2\Rightarrow bm=dn^2$. وبما أن : $a=dm$ فإن : $\boxed{a=m^2}$

خلاصة : $\boxed{\exists(m,n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*/\ \ a=dm\ \text{ و }\ c=dn\ \text{ و }\ m\wedge n=1}$

مبرهنة Wilson :

ليكن p عددا صحيحا طبيعيا . لدينا :

p أولي $\Leftrightarrow (p-1)!+1\equiv 0[p]$

مبرهنة Fermat :

أ) ليكن p عددا أوليا موجبا وليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم بحيث :

$n\wedge p=1$. لدينا : $\boxed{n^{p-1}\equiv 1[p]}$.

ب) لكل عدد أولي موجب p ولكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم a , لدينا :

$\boxed{a^p\equiv a[p]}$