الثانوية التأهيلية وادي الذهب - تيفلت -	فرض محروس رقم 3 د II www.riyadiyat.net	Le 11/05/13 2 B. SC. M - Rh -

التمرين الأول: نعتبر المعادلات التفاضلية التالية:

$(E): y''-2y'+10y=10x^2-4x+2$; $(E_1): y''-2y'+10y=0$ و $(E_2): z''+9z=0$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=x^2$

1) نضع: $z=ye^{-x}$

أ- بين أن y حل للمعادلة التفاضلية (E_1) إذا وفقط إذا كان z حل للمعادلة التفاضلية (E_2). 1

ب- حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية (E_2). 1

ج- استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E_1). 0,5

2) أ- تحقق أن الدالة f حل للمعادلة التفاضلية (E). 0,5

ب- بين أن دالة g تكون حلا للمعادلة (E) إذا وفقط إذا كانت الدالة $(g-f)$ حلا للمعادلة التفاضلية (E_1). 1

ج- استنتج الحل العام للمعادلة التفاضلية (E). 1

د- حدد الحل الخاص للمعادلة (E)، الذي يحقق: $y(0)=1$ و $y'(0)=-1$ 1

التمرين الثاني: نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة: $(F): 23x-48y=1$

1) أ- باستعمال خوارزمية أقليدس، حدد حلا خاصا للمعادلة (F). 0,5

ب- بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي:

$$S=\{(-25+48k\ ;\ -12+23k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$ 1

ج- استنتج من ب) أن: $23^2\equiv 1\ [48]$ 0,5

2) ليكن a و b عددين صحيحين طبيعيين:

في المجموعة $\mathbb{Z}/_{91\mathbb{Z}}$؛ بين أنه إذا كان $(\bar{a})^{23}=\bar{b}$ و $(\bar{a})^{48}=\bar{1}$

فإن $(\bar{b})^{23}=\bar{a}$ ($\bar{x}$ هو صنف تكافؤ x بترديد 91). 1

3) نعتبر في $\mathbb{N}$ النظمة التالية: $(G): \begin{cases} n\equiv 8\ [23] \\ n\equiv 9\ [48]\end{cases}$

بين أن: $n\equiv 537\ [1104] \iff n$ حل للنظمة (G) 1,5

4) مستعملا مبرهنة فيرما، حدد باقي قسمة 3^{48} على 91. 1

يؤخذ بعين الإعتبار سلامة الانشاء ونظافة العمل

(أنظر الصفحة الموالية) ←

التمرين الثالث: I - نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة:

$$(E_a): \quad 2z^2 + a(1-i)z + a^2(1-i) = 0$$

حيث: $a \in \mathbb{C}^*$

1) أ - أحسب $(a+3ia)^2$ — 0,5

ب - حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_a). — 1

2) حدد معيار و عمدة كل من z_1 و z_2 بدلالة معيار و عمدة a. — 1,5

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
نعتبر النقطتين: $A(a)$ و $B(ia)$.

1) بين أن المثلث OAB قائم الزاوية و متساوي الساقين. — 1,5

2) ليكن F التطبيق في المستوى الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث: $z' = (1+i)z - ia$

أ - نفترض أن $M \neq A$. بين أن: $AM' = \sqrt{2}\,AM$ ثم حدد $\overline{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AM'})}$. — 1,5

ب - نعتبر الدوران R الذي مركزه A وزاويته $-\frac{\pi}{4}$ والتطبيق: $h = F \circ R$
حدد الصيغة العقدية للتطبيق h ثم استنتج طبيعته وعناصره المميزة. — 1,5

التمرين الرابع:

1) ليكن A و B من $M_2(\mathbb{R})$، نضع: $\mathcal{E} = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / AM = MB\}$
بين أن $\mathcal{E}$ فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$. — 1

2) نضع: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

أ - حدد المجموعة $\mathcal{E}$. — 0,5

ب - استنتج أساسا و بعد للفضاء المتجهي $\mathcal{E}$. — 1

ج - بين أن A و B قابلتان للقلب ثم حدد A^{-1} و B^{-1}. — 0,5

ع - ع