التمرين الأول

1)- تحديد مركز و شعاع الفلكة (S)

لدينا :
$$M(x,y)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9-1-4-9-11=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5^2$$

و منه (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(1,2,3)$ و شعاعها $r=5$.

2)- أ- حساب $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

لدينا : $\overrightarrow{AB}(1,3,-4)$ و $\overrightarrow{AC}(0,3,-4)$

إذن
$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}1&0&\vec{i}\\3&3&\vec{j}\\-4&-4&\vec{k}\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}3&3\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-4&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=4\vec{j}+3\vec{k}$$

استنتاج معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن معادلة له تكتب على الشكل $4y+3z+d=0$

و بما أن $A(0,-2,0)\in(ABC)$ فإن $4\times(-2)+3\times0+d=0$ ، أي $d=8$.

و بالتالي: $(ABC):4y+3z+8=0$

ب- حساب $d(\Omega,(ABC))$

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|4\times2+3\times3+8|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}}=5=r$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S)

3)- أ- تحديد تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)

لدينا $(\Delta)\perp(ABC)$ و $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ منظمية على (ABC)

إذن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(0,4,3)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ).

و لدينا : $\Omega(1,2,3)\in(\Delta)$ ، إذن النظمة: $(t\in\mathbb{R})$
$$(\Delta):\begin{cases}x=1\\y=2+4t\\z=3+3t\end{cases}$$

تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).

ب- تحديد إحداثيات H ، نقطة تقاطع (Δ) و (ABC)

لدينا :
$$H(x,y,z)\in(\Delta)\cap(ABC)\Leftrightarrow\begin{cases}x=1 & (1)\\y=2+4t & (2)\\z=3+3t & (3)\\4y+3z+8=0 & (4)\end{cases}$$

نعوض كل من المعادلات (1) و (2) و (3) في (4) و نحصل على:

$4(2+4t)+3(3+3t)+8=0$ و منه $t=-1$

و بالتالي $H(1,-2,0)$

ج- نقط تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

لدينا : $H\in(ABC)$ و $(x_H-1)^2+(y_H-2)^2+(z_H-3)^2=(1-1)^2+(-2-2)^2+(0-3)^2=25$

إذن $H\in(S)$

ومنه H هي نقط تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

التمرين الثاني

1)- لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة: $z^2-8\sqrt{3}z+64=0$

لدينا: $\Delta'=\left(-4\sqrt{3}\right)^2-64=-16=(4i)^2$

إذن المعادلة تقبل جذرين عقديين مترافقين هما: $4\sqrt{3}-4i$ و $4\sqrt{3}+4i$

و منه $S=\left\{4\sqrt{3}-4i,4\sqrt{3}+4i\right\}$

2)- أ- التعبير العقدي للدوران $R\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)$

لدينا

$$R(M)=M'\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\overline{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}}\right)=\frac{4\pi}{3}[2\pi]\\ OM=OM'\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\arg\left(\frac{z'}{z}\right)=\frac{4\pi}{3}[2\pi]\\ |z'|=|z|\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z'=ze^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow z'=\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$$

ب- لنبين أن النقطة B هي صورة النقطة A بالدوران $R\left(O,\frac{4\pi}{3}\right)$

لدينا: $\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a=8i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=4\sqrt{3}-4i=b$

و بالتالي $R(A)=B$

ج- لنبين أن $\frac{a-b}{c-b}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

لدينا

$$\frac{a-b}{c-b}=\frac{8i-4\sqrt{3}+4i}{2\left(4\sqrt{3}+4i\right)-4\sqrt{3}+4i}$$

$$=\frac{-4\sqrt{3}+12i}{4\sqrt{3}+12i}$$

$$=\frac{\left(3i-\sqrt{3}\right)^2}{-9-3} \quad =\frac{3+6i\sqrt{3}+6}{12} \quad =\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

و بالتالي الشكل المثلثي للعقدي $\frac{a-b}{c-b}$ هو: $\frac{a-b}{c-b}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\left[1,\frac{\pi}{3}\right]$

د- تحديد طبيعة المثلث ABC

لدينا: $\left|\frac{a-b}{c-b}\right|=1 \Leftrightarrow |a-b|=|c-b| \Leftrightarrow BA=BC$

و لدينا: $\arg\left(\frac{a-b}{c-b}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\pi}{3}[2\pi]$

إذن المثلث ABC متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث

بما أن السحب يتم بالتتابع و بدون إحلال،فإن كل إمكانية هي ترتيبة لعنصرين من بين ثمانية و عددها هو $card\Omega=A_8^2=8\times7=56$.

1)- حساب $P(A)$ و $P(B)$

لدينا : $cardA=A_3^2=3\times2=6$

إذن $P(A)=\frac{A_3^2}{A_8^2}=\frac{6}{56}=\frac{3}{28}$

نعتبر الحدث $\overline{B}$:"عدم الحصول على أية كرة حاملة للرقم 3 "

لدينا: $card\,\overline{B}=A_6^2=6\times5=30$

إذن $P\left(\overline{B}\right)=\frac{A_6^2}{A_8^2}=\frac{15}{28}$ و منه $P(B)=1-P\left(\overline{B}\right)=1-\frac{15}{28}=\frac{13}{28}$

2)- أ- تحديد قيم المتغير العشوائي X

عدد الكرات الحاملة لرقم فردي هو إما 0 و إما 1 و إما 2 .

إذن $X(\Omega)=\{0,1,2\}$.

ب- حساب $P(X=1)$

الحدث $(X=1)$ يعني الحصول على كرة واحدة بالضبط تحمل رقما فرديا.

و لتحقيق ذلك، نختار مكانا لهذه الكرة من بين مكانين ب C_2^1 كيفية مختلفة ،

ثم نرتب الكرة الحاملة للرقم الفردي من بين ثلاث كرات ، ب A_3^1 كيفية مختلفة،

ثم نرتب الكرة الغير حاملة للرقم الفردي من بين خمس كرات ب A_5^1.

إذن $P(X=1)=\frac{C_2^1A_3^1A_5^1}{C_8^2}=\frac{2\times3\times5}{56}=\frac{15}{28}$

ج- تحديد قانون احتمال X

لدينا : $P(X=0)=\frac{A_3^2}{A_8^2}=\frac{3}{28}$ و $P(X=2)=\frac{A_5^2}{A_8^2}=\frac{10}{28}$

x_i	0	1	2
$P(X=x_i)$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{10}{28}$

التمرين الرابع

1)- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$

- من أجل $n=0$، لدينا $u_0=1>0$
- نفترض أن $u_n>0$ و نبين أن $u_{n+1}>0$

لدينا : $u_n>0 \Rightarrow \dfrac{3u_n}{21+u_n}>0$

$\Rightarrow u_{n+1}>0$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}, u_n>0$

2)- لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n$

لدينا
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-\frac{1}{7}u_n=\frac{3u_n}{21+u_n}-\frac{1}{7}u_n$$
$$=\frac{21u_n-21u_n-u_n^2}{7(21+u_n)}$$
$$=-\frac{u_n^2}{7(21+u_n)}<0$$

إذن $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n$

3)- رتابة المتتالية (u_n)

لدينا
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}-u_n=\frac{3u_n}{21+u_n}-u_n$$
$$=-\frac{(18u_n+u_n^2)}{21+u_n}<0 \qquad (\text{لأن } \forall n\in\mathbb{N}, u_n>0)$$

ومنه المتتالية (u_n) تناقصية.

تقارب المتتالية (u_n)

لدينا: (u_n) متتالية تناقصية و موجبة (مصغورة بالصفر)، إذن فهي متقاربة.

4)-أ-لنبين بالترجع أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n<\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

- من أجل $n=1$، لدينا $u_1=\dfrac{3}{22}<\dfrac{1}{7}$.
- نفترض أن $u_n<\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ و نبين أن $u_{n+1}<\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

لدينا : $u_n<\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$ و $u_{n+1}<\dfrac{1}{7}u_n$، إذن $u_{n+1}<\dfrac{1}{7}\times\left(\dfrac{1}{7}\right)^n=\left(\dfrac{1}{7}\right)^{n+1}$

و بالتالي $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n<\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

ب نهاية المتتالية (u_n)

لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*,0<u_n<\left(\frac{1}{7}\right)^n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n=0$ (لأن $0<\frac{1}{7}<1$)

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$

التمرين الخامس

I)- 1)-أ- $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,(x-1)(3x^2+3x+2)=3x^3+3x^2+2x-3x^2-3x-2$

$$=3x^3-x-2$$

إذن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2)$

ب- حساب $g'(x)$

لدينا : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,g'(x)=\left(x^3-x-2\ln x+3\right)'$

$$=3x^2-1-\frac{2}{x}$$

$$=\frac{3x^3-x-2}{x}$$

$$=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$$

2)-أ- لدينا: $3x^2+3x+2$ هي ثلاثية الحدود مميزها سالب

إذن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,3x^2+3x+2>0$ و منه $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$

ب- إشارة $g'(x)$

بما أن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,\frac{3x^2+3x+2}{x}>0$ و $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,g'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+2)}{x}$

فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$.

3)- أ- رتابة الدالة g

لدينا: $\forall x\in\left]0,1\right],x-1<0$ (أي $g'(x)<0$) ومنه g تناقصية على $\left]0,1\right]$.

و لدينا: $\forall x\in\left[1,+\infty\right[,x-1>0$ (أي $g'(x)<0$) ومنه g تزايدية على $\left[1,+\infty\right[$.

ب- إشارة $g(x)$ على $\left]0,+\infty\right[$

من خلال تغيرات الدالة g ، نستنتج أن الدالة g تقبل قيمة دنيا عند 1

هي $g(1)=3>0$ ، إذن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,g(x)\geq g(1)>0$.

II)- نعتبر الدالة العددية f حيث: $f(x)=x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}$

1)- حساب $f'(x)$

لدينا: $f'(x)=\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)'$

$$=1+\frac{(x-1+\ln x)'x^2-(x^2)'(x-1+\ln x)}{x^4}$$

$$=1+\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-2x\left(x-1+\ln x\right)}{x^4}$$

$$=1+\frac{x^2+x-2x^2+2x-2x\ln x}{x^4}$$

$$=\frac{x^3-x+3-2\ln x}{x^3}=\frac{g(x)}{x^3}$$

رتابة الدالة f

بما أن $x^3>0$ و $\forall x\in\left]0,+\infty\right[, g(x)>0$ فإن $\forall x\in\left]0,+\infty\right[, f'(x)>0$

و بالتالي الدالة f تزايدية قطعا على المجال $\left]0,+\infty\right[$.

2)- أ- حساب $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=-\infty$

(لأن $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1+\ln x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$ و $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2)=0^+$).

التأويل الهندسي

لدينا: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$، إذن المستقيم ذو المعادلة $x=0$ (محور الأراتيب) مقارب عمودي لمنحنى الدالة f .

ب- لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=0$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)=0$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-1+\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to+\infty}(x-1)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=+\infty$$

ج- المقارب المائل ل (C_f) بجوار $+\infty$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-1)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)=0$

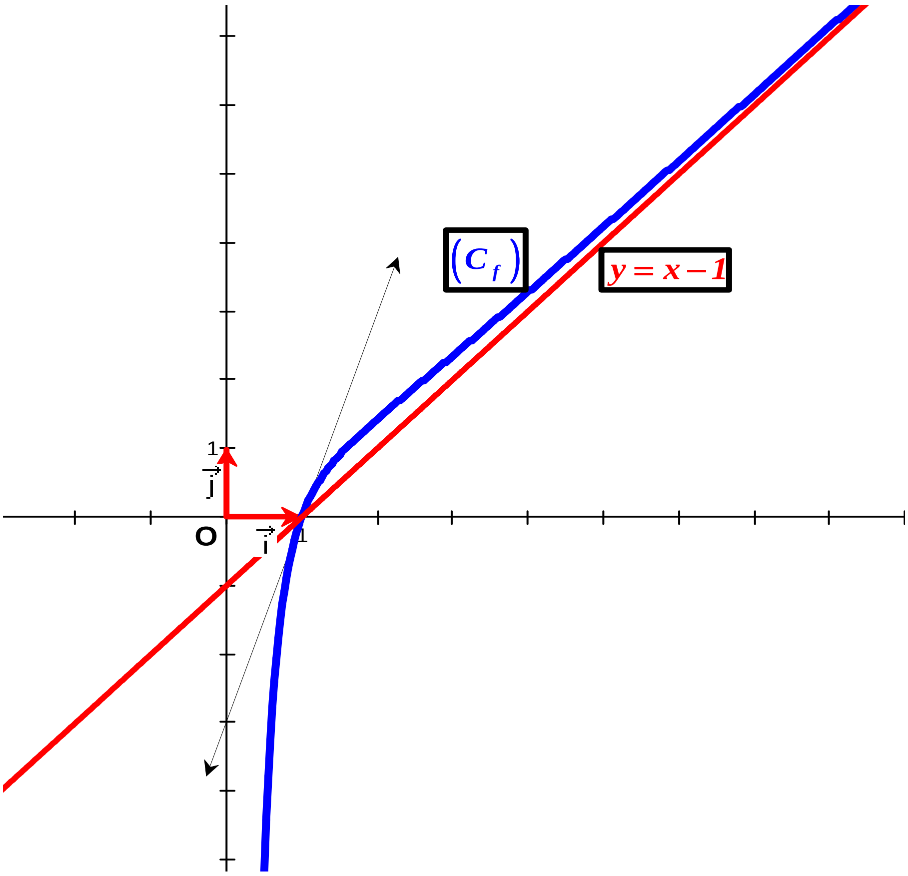
إذن المستقيم ذو المعادلة $y=x-1$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

3)- معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة أفصولها 1.

لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=\frac{g(1)}{1}=3$

إذن معادلة المماس للمنحنى (C_f) في النقطة أفصولها 1 هي $y=3(x-1)$.

4)- إنشاء منحنى الدالة f



5)- أ- حساب $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx$

$$\int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \int_1^e \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x dx = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{(\ln x)'}{x}dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = 1 - \frac{2}{e}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (Δ) و المستقيمين الذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$

هي:
$$A = \int_1^e \left| f(x) - (x-1) dx \right| = \int_1^e \left(\frac{x-1+\ln x}{x^2}\right)$$

$$= \int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx + \int_1^e \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)dx = \left[\ln x + \frac{1}{x}\right]_1^e + 1 - \frac{2}{e}$$

$$= 1 + \frac{1}{e} - 1 + 1 - \frac{2}{e} = 1 - \frac{1}{e}$$

وبما أن $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm^2$ فإن $A = \left(1 - \frac{1}{e}\right)cm^2$.