Lycée Med Ben Hassan El ouazzani Khemisset	Année scolaire 2019/2020	
	Date : 23/11/2019	
Niveau : 2éme Année Bac Sm Bac International	Mathématiques	Ali Cherif
	Devoir N°2 du 1ére semestre	2H30min

<u>Exercice 1 :</u> 5pts

On donne la représentation graphique (C) d'une fonction dans un repére orthonormé d'une fonction f définie et continue sur IR telle que:

* La droite d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

* La droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

1) A l'aide d'une lecture graphique et avec justification:

a) Déterminer les limites suivantes :

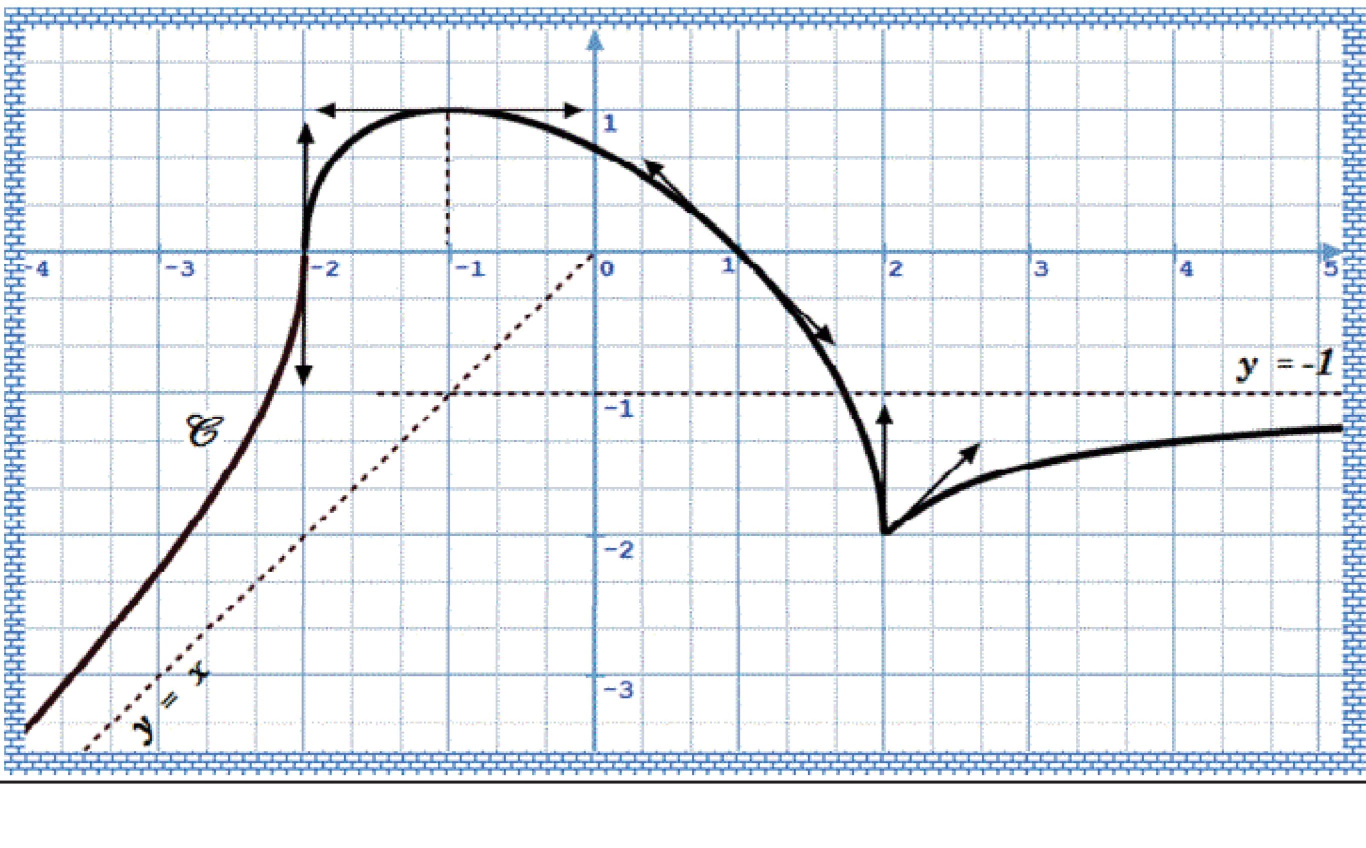
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{f(x)}{x+2}$, $\lim\limits_{x\to(-2)^+} \dfrac{f(x)}{x+2}$ 2,5pt

b) Déterminer $f'(-1)$, $f'(1)$ et $f'_d(2)$. 1,5pt

2) Dresser le tableau de variation de f . 0,5pt

3) Soit g la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(2\tan(x)) & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1 & \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 0,5pt



Exercice 2 : 6pts

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

(C_f) sa courbe reresentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1}{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^3}$. 0,5pt

b) Dresser le tableau de variation de f. 0,5pt

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$. 1pt

3) Tracer (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le mème repère. 1pt

4) Montrer que l'équation $f(x)=\dfrac{1}{2}x$ admet, dans $]0,+\infty[$ une unique solution α vérifiant $\alpha\succ 1$. 0,5pt

5) Soit (u_n) la suite définie par : $u_0=1$ et $\forall n\in IN, u_{n+1}=f(2u_n)$.

a) Montrer que $\forall n\in IN$, $u_n\geq 1$. 0,5pt

b) Montrer que $\forall x\in[1,+\infty[$: $|f'(x)|\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ 0,5pt

c) Montrer que $\forall n\in IN$, $\left|u_{n+1}-\dfrac{\alpha}{2}\right|\leq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}\left|u_n-\dfrac{\alpha}{2}\right|$ 0,5pt

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite. 0,25pt

6) Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $S_n=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n}f^{-1}(k)$

a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $f^{-1}(2n)\leq S_n\leq f^{-1}(n)$. 0,5pt

b) En déduire que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite. 0,25pt

Exercice 3 : 5pts

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n\in IN^*)$: $a_{n+1}=1+a_1a_2......a_n$ et $a_1=1$

1) a – Montrer que : $(\forall n\geq 2)$: $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2$ 1pt

b – Déduire la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$. 0,5pt

2) a – Montrer que : $(\forall n\geq 1)$: $a_n\in IN$. 0,5pt

3) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$. 1pt

4) Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$

a – Montrer que $(\forall n\geq 2)$: $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_n-1}-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ 1pt

b – Déduire la limite de $(S_n)_{n\geq 1}$. 1pt

Exercice 4 :3pts

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $(\forall n\geq 1): u_n=\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)-2\sqrt{n+1}$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par : $(\forall n\geq 1)$ $v_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}-2\sqrt{n}$

1) a – Montrer que $(\forall n\geq 1)$: $u_n\leq v_n$. 0,25pt

b – Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et $(v_n)_{n\geq 1}$ décroissante . 0,5pt

c – Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. 0,25pt

2) Soit ℓ la limite de $(v_n)_{n\geq 1}$.

a – Montrer que : $(\forall n\geq 1): |u_n-\ell|\prec\frac{1}{\sqrt{n}}$ 1pt

b – Déterminer n pour que u_n soit approché au nombre ℓ à 10^{-2} prés. 0,5pt

3) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}=2$ 0,5pt

Challenge no 1:

Soit (u_n) la suite définie par : $(\forall n\in \mathbb{N}): u_n=\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{5}\right)^n\right)$

1) Montrer que : $(\forall n\in \mathbb{N}): \left(2+\sqrt{5}\right)^n+\left(\sqrt{5}-2\right)^n\in 2\mathbb{N}$.

2) Montrer que : (u_n) est convergente .

Challenge no 2 :

Soient $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ trois suites réelles , $a\in\mathbb{R}$. On suppose que :

$\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n+w_n)=3a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n^2+v_n^2+w_n^2\right)=3a^2$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$; $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=a$; $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=a$

Challenge no 3 :

Soit (u_n) une suite numérique tel que $u_{n+1}-u_n$ converge vers un nombre réel ℓ.

Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

cherifalix@gmail.com
G.S.M: 0664865556