الصفحة
1 / 5

الامتحان التجريبي الثاني لنيل شهادة البكالوريا مدينة زايو 2018

المادة	الرياضيات	المعامل	9
الشعبة	شعبة العلوم الرياضيات (أ) و(ب)	مدة الإنجاز	4

بسم الله الرحمان الرحيم

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية..............................(3.00 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية..............................(4.00 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..............................(3.00 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل..............................(10.00 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

N.B: toute réponse non justifiée ou non détaillée sera considérée comme fausse

إعداد الأستاذ : سفيان طجيو و عبد العلي طجيو

التمرين الأول: (3 نقط)

في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و M و M' و N التي ألحاقها على التوالي : i و $-i$ و z و z' و $\overline{z}$.

وليكن f التطبيق المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ نحو $\mathbb{C}$ والذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\dfrac{iz+1}{z+i}$.

0.50 ن **I** ـ 1) بين أنه إذا كانت $M(z)\in(P)-\{A,B\}$ فإن النقط A و N و M' مستقيمية.

0.25 ن 2) **a**- بين أن : $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM'})}\equiv\dfrac{\pi}{2}+\overline{(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA})}[2\pi]$.

0.25 ن **b**- استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون z' عدد حقيقي سالب غير منعدم.

0.25 ن 3) حدد مجموعة النقط $M'(z')$ بحيث تكون النقطة $M(z)$ تنتمي إلى القطعة $[AB]$ محرومة من A و B.

II ـ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E):\left(\dfrac{iz+1}{z+i}\right)^3=1$.

0.50 ن 1) **a**- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $M(z)$ تنتمي إلى واسط القطعة $[AB]$.

0.25 ن **b**- استنتج أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن z عدد حقيقي.

2) نفترض أن : $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$.

0.50 ن **a**- بين أن : $\left(\dfrac{i\tan\theta+1}{\tan\theta+i}\right)=e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)}$.

0.50 ن **b**- حدد قيم θ لكي تكون $\tan\theta$ حل للمعادلة (E).

التمرين الثاني : (4 نقط)

ليكن a عدداً عقديا غير منعدم و (P) المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

I ـ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(F):z^3+(2-i)z^2+\left(a^2+1-2i\right)z-i\left(a^2+1\right)=0$$

1.00 ن 1) **a**- نفترض أن i حل للمعادلة (F). حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (F).

0.50 ن **b-** حدد على الشكل الجبري العدد العقدي a لكي يكون جداء حلول المعادلة (F) يساوي 1.

c- نعتبر في المستوى (P) النقطة M ذات اللحق a.

0.50 ن ✓ حدد مجموعة النقط M بحيث يكون للمعادلة (F) على الأقل حلين لهما نفس المعيار.

2) نضع : $z_1=-1+ia$ و $z_2=-1-ia$ و $a=e^{i\alpha}$ بحيث $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

0.50 ن ✓ أكتب z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.

II- نعتبر في المستوى (P) النقط N و N_1 و N_2 التي ألحاقها على التوالي a و $z_1=-1+ia$ و $z_2=-1-ia$.

0.50 ن **1)** حدد مجموعة النقط N بحيث تكون النقط N و N_1 و N_2 مستقيمية.

2) نفترض أن : $a\overline{a}-\mathcal{R}e(a)\neq 0$ وليكن R التحويل الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' حيث $z'=iz-1$.

0.25 ن **a-** بين أن R دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω وقياسا لزاويته.

0.50 ن **b-** بين أن العدد العقدي $\frac{z_2-a}{z_2-z_1}$ تخيلي صرف إذا وفقط إذا كان $a\overline{a}-\mathcal{I}m(a)=0$.

0.25 ن **c-** استنتج مجموعة النقط N بحيث تكون النقط Ω و N و N_1 و N_2 متداورة.

التمرين الثالث: (3 نقط)

في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط A و B و M و M' التي ألحاقها على التوالي : 1 و $1-2i$ و z و z'.

وليكن f التطبيق المعرف من $\mathbb{C}-\{1\}$ نحو $\mathbb{C}$ والذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث : $z'=\frac{z-1+2i}{z-1}$.

0.50 ن **1)** بين أن f تقبل نقطتين صامدتين I و J محدداً لحقاهما.

0.50 ن **2)** بين أنه لكل $A\neq M$ لدينا : $f\circ f(M)=M$.

0.25 ن **3) a-** حدد صورة واسط القطعة $[AB]$ بالتطبيق f.

0.50 ن **b-** بين أن : $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{OM'})}\equiv\overline{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM})}[2\pi]$، ثم استنتج صورة الدائرة التي قطرها $[AB]$ والمحرومة من النقطة A.

0.75 ن c- بين أن : $AM' \times AM = 2$ ثم أن : $\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{AM'}\right)}+\overline{\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

d- نعتبر النقطة M ذات اللحق $z=1+e^{i\theta}$ بحيث θ عدد حقيقي.

0.50 ن ✓ إقترح طريقة لإنشاء النقطة $M'(z')$.

التمرين الرابع: (10 نقط)

I ـ ليكن n عدداً صحيحيا طبيعيا بحيث $n \geq 1$.

نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g_n(x)=\frac{n\ln x}{2}+x-n$$

0.25 ن (1 أدرس تغيرات الدالة g_n.

0.50 ن (2 a- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n المعادلة $(E_n): n\ln x+2x=2n$ تقبل حلا وحيداً α_n في المجال $]0,+\infty[$.

0.75 ن b- بين أن : $(\forall n\geq 1);\ 1\leq \alpha_n < e^2$ ثم حدد القيمة العددية للحل α_1.

0.75 ن (3 a- بين أن : $(\forall n\geq 1);\ g_{n+1}(\alpha_n)=-\frac{\alpha_n}{n}$، ثم استنتج رتابة المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

0.75 ن b- استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة، ثم بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=e^2$.

1.00 ن (4 أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha_n} \text{ و } \lim_{n\to+\infty} n\left(\ln(\alpha_n)-2\right) \text{ و } \lim_{n\to+\infty} n\left(\alpha_n-e^2\right).$$

II ـ نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.00 ن (1 أحسب النهايات التالية مع إعطاء تأويلات هندسية للنتائج المحصل عليها :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

0.75 ن (2 a- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$، ثم أن : $f'(x)=\frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.

0.50 ن b- استنتج جدول تغيرات الدالة f.

0.50 ن 3) أنشئ المنحنى (C_f) في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1\ cm$)

III_ نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=g_2(u_n)-u_n+3;\ (\forall n\in\mathbb{N}) \\ u_0\geq 1 \end{cases}$

0.25 ن 1) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\ u_n\geq 1$.

0.50 ن 2) a- أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

0.50 ن b- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة محدداً نهايتها.

IV_ لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}-\sqrt{x}\ln x$$

0.25 ن 1) بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

2) نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $v_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)$

ليكن k عدداً صحيحيا طبيعيا بحيث : $0\leq k\leq n+1$ و $n\in\mathbb{N}^*$.

0.25 ن a- بين أن : $\left(\forall x\in\left[1+\frac{k}{n},1+\frac{k+1}{n}\right]\right);\ f\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq f(x)\leq f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$.

0.50 ن b- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن :

$$\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq F\left(1+\frac{k+1}{n}\right)-F\left(1+\frac{k}{n}\right)\leq\frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

0.50 ن c- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\ v_n-\frac{f(2)}{n}\leq F(2)-F(1)\leq v_n-\frac{f(1)}{n}$.

0.50 ن d- استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

إنتهى الموضوع

bon courage et bonne chance ☺