2 بكالوريا علوم رياضية	تجريبي مادة الرياضيات	ثانوية موسى بن نصير
مدة الإنجاز : أربع ساعات	دورة ماي 2016	نيابة الخميسات
المعامل 09		

❖ تمرين رقم 01: (03 نقط)

⇦ لكل (a,b) من $\mathbb{C}^2$ ، نضع : $a*b=a+b+iab$.

1- تحقق أن : $\left(\forall (a,b)\in\mathbb{C}^2\right);1+i(a*b)=(1+ia)(1+ib)$. — 0,25

2- بين أن $(\mathbb{C}-\{i\},*)$ زمرة تبادلية . — 0,75

3- نعتبر المجموعة : $(\Gamma)=\{z\in\mathbb{C},|z-i|=1\}$.

▪ بين أن $(\Gamma,*)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C}-\{i\},*)$. — 0,5

4- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):z*z*z=0$. — 0,5

5- لكل (a,b) من $\mathbb{C}^2$ ، نضع : $a\perp b=a+b-i$.

أ- بين أن $(\mathbb{C},\perp)$ زمرة تبادلية . — 0,5

ب- بين أن $*$ توزيعي على $\perp$ في $\mathbb{C}$ ، ثم إستنتج بنية $(\mathbb{C},\perp,*)$. — 0,5

❖ تمرين رقم02: (3,5 نقطة)

1- أ- بين أن : $6^{30}\equiv 1[55]$. — 0,5

ب- إستنتج باقي القسمة الأقليدية للعدد $A=6^{33}$ على 55 . — 0,25

2- في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ ، نعتبر المعادلة : $(E):17x-40y=1$.

أ- بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) غير فارغة . — 0,25

ب- تحقق من أن الزوج $(33,14)$ حل للمعادلة (E) . — 0,25

ج- حل المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل . — 0,5

د- حدد أصغر عدد صحيح طبيعي x_0 يحقق : $17x_0\equiv 1[40]$. — 0,25

3- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ ، النظمة : $(S):\begin{cases}x^{17}\equiv a[55]\\ x^{40}\equiv 1[55]\end{cases}$ ، حيث $a\in\mathbb{N}$.

▪ بين أنه إذا كان x حلا للنظمة (S) فإن : $x\equiv a^{33}[55]$. — 0,5

4- نفترض في هذا السؤال أن : $a\wedge 55=1$.

أ- بين أن : $a^{40}\equiv 1[55]$. — 0,5

ب- إستنتج أن مجموعة حلول النظمة (S) هي : $S=\{a^{33}+55k/k\in\mathbb{Z}\}$. — 0,5

5- بين أن مجموعة حلول النظمة $(S'):\begin{cases}x^{17}\equiv 6[55]\\ x^{40}\equiv 1[55]\end{cases}$ هي : $S'=\{51+55k/k\in\mathbb{Z}\}$. — 0,25

❖ تمرين رقم 03: (3,5 نقطة)

⇦ نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ ، المعادلة :

$(E):\frac{1}{m}z^2+(1-3i)z-4m=0$ ، حيث $m\in\mathbb{C}^*$.

1)- أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $a=8-6i$. 0,25

ب- حدد بدلالة m الحلين z_1 و z_2 للمعادلة (E) بحيث : $\text{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right)<0$. 0,5

ج- نضع : $\theta\equiv\arg(m)[2\pi]$ ، أحسب بدلالة θ كلا من $\arg(z_1)$ و $\arg(z_2)$. 0,5

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر

النقط M_1 و M_2 و M و D التي ألحاقها على التوالي هي : z_1 و z_2 و m و $z_D=1+3i$.

أ- بين أن المثلث OM_1M_2 قائم الزاوية في O . 0,25

ب- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق m بحيث تكون النقط O و M و D مستقيمية . 0,5

ج- حدد مجموعة النقط M ذات اللحق m بحيث يكون المثلث ODM قائم الزاوية في O . 0,5

3)- النقطة $M_1^{'}$ هي صورة M_1 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ و النقطة $M_2^{'}$ هي صورة

M_2 بالدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{-\pi}{2}$.

أ- بين أن النقط M_1 و M_2 و $M_1^{'}$ و $M_2^{'}$ متداورة . 0,5

ب- حدد بدلالة m لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) المارة من M_1 و M_2 و $M_1^{'}$ و $M_2^{'}$. 0,5

❖ تمرين رقم 04: (03 نقط)

⇦ ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $[0,1[$ بما يلي :

$\left(\forall x\in[0,1[\right);\ f_n(x)=\int_0^x\frac{t^n}{(1+t)(1-t)^2}dt$.

1)- أ- بين أن المتتالية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية ، ثم إستنتج أنها متقاربة . 0,5

ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\ f_n(x)\le x^n\int_0^x\frac{1}{(1+t)(1-t)^2}dt$ ، ثم إستنتج نهاية $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 0,5

2)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in[0,1[\right);\ f_1(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2}$. 0,5

ب- أحسب النهاية : $\lim_{x\to1^-}f_1(x)$ ، ثم أدرس تغيرات الدالة f_1 على $[0,1[$. 0,5

3)- أ- بين أنه : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)\left(\exists!\alpha_n\in[0,1[\right);\ f_1(\alpha_n)=\frac{1}{n}$. 0,25

ب- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تناقصية قطعا . 0,25

ج- إستنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أحسب نهايتها . 0,5

❖ تمرين رقم 05: (07 نقط)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي : **4,25**

$f(0)=0$ و $f(1)=1$ و $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[);\ f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$.

1)- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي . **0,5**

2)- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق f على اليمين في الصفر . **0,5**

3)- أ- بين أن f متصلة في $x_0=1$. **0,25**

ب- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة : $x\mapsto \ln x-(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2$: ¨

بين أنه : $(\forall x\in]0,1[)(\exists c\in]x,1[);\ \dfrac{\ddot{}\,(x)}{x-1}=\dfrac{(c-1)^2}{c}$. **0,5**

ج- إستنتج أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في $x_0=1$ وحدد $f'_g(1)$. **0,5**

د- بين أن : $(\forall x\in]1,+\infty[);\ \dfrac{f(x)-1}{x-1}=1-\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{\frac{1}{x}-1}$ ، ثم إستنتج أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في $x_0=1$ وحدد $f'_d(1)$. **0,5**

هـ- بين أن f قابلة للأشتقاق في $x_0=1$ ، ثم أكتب معادلة المماس (T) في النقطة $A(1,f(1))$. **0,25**

4)- أ- بين أن f قابلة للإشتقاق على المجالين $]0,1[$ و $]1,+\infty[$ و أن :

$(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[);\ f'(x)=\dfrac{\ln x-\dfrac{x-1}{x}}{(\ln x)^2}$. **0,5**

ب- بين أن : $(\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[);\ln x>\dfrac{x-1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f على $[0,+\infty[$. **0,5**

5)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ مبرزا المماس (T) . **0,25**

II- لتكن F و G الدالتين المعرفتين على $[0,+\infty[$ بما يلي : **2,75**

$F(x)=\int_{e^{-x}}^{1} f(t)\,dt$ و $G(x)=\int_{e^{-x}}^{1}\dfrac{f(t)}{t}\,dt$.

1)- بين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ و أن : **0,5**

$(\forall x\in]0,+\infty[);F'(x)=e^{-x}f\left(e^{-x}\right)$.

2)- أ- تحقق أن : $(\forall x\in[0,1]);xf(x)=2f\left(x^2\right)-f(x)$. **0,25**

ب- إستنتج أنه لكل x من $[0,+\infty[$ ، لدينا :

$F(x)=G(2x)-G(x)$ و أن : $F(x)=\int_{e^{-2x}}^{e^{-x}}\dfrac{f(t)}{t}\,dt$. **0,75**

3)- أ- بين أن : $\left(\forall t\in\left]0,\frac{1}{e}\right]\right);0\le\frac{-1}{\ln t}-f(t)\le t$. **0,5**

ب- إستنتج أن : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right);0\le\ln2-F(x)\le e^{-x}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. **0,5**

4)- ضع جدول تغيرات الدالة F على $[0,+\infty[$. **0,25**

❖ تمرين إضافي رقم 01:

- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\frac{\sqrt{n^2+4n+8}}{n+2}\le\int_0^1\sqrt{1+t^n}\,dt\le\frac{n+4}{n+2}$.

❖ تمرين إضافي رقم 02:

- بين أن : $\left(\forall a\in\mathbb{Z}\right);\left(a\wedge959595=1\right)\Rightarrow\left(a^{36}\equiv1[959595]\right)$.

❖ تمرين إضافي رقم 03:

- حدد في نظمة العد العشري رقم وحدات العدد الصحيح الطبيعي $N=\sum_{k=1}^{20}k^{2014}$.

❖ تمرين إضافي رقم 04:

⇦ ليكن p عنصرا من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.

- بين أن p أولي إذا و فقط إذا كان : $\left(\forall k\in\{0,1,\dots,p-1\}\right);C_{p-1}^{k}\equiv(-1)^k[p]$.

❖ تمرين إضافي رقم 05:

⇦ لتكن E مجموعة الدوال العددية f بحيث :

$$\left(\exists(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\right)\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);f(x)=a+be^{-x}+ce^{-2x}.$$

و لكل $k\in\{0,1,2\}$ ، نعتبر الدالة f_k المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);f_k(x)=e^{-kx}$.

1)- أ- بين أن $(E,+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

ب- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(f_0,f_1,f_2)$ تكون أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

2)- لتكن f دالة عددية من E و (a,b,c) مثلوث إحداثياتها في الأساس $\mathrm{B}(f_0,f_1,f_2)$.

أ- بين أن : $f'\in E$ و $f''\in E$ محددا مثلوث إحداثيتيهما في الأساس $\mathrm{B}(f_0,f_1,f_2)$.

ب- بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),f^{(n)}\in E$ (حيث $f^{(n)}$ هي مشتقة الدالة f من الرتبة n)

و حدد بدلالة b و c و n مثلوث إحداثيات الدالة $f^{(n)}$ في الأساس $\mathrm{B}(f_0,f_1,f_2)$.

ج- حدد شرطا كافيا ولازما لكي تكون الأسرة $\mathrm{B}'(f,f+f',f'+f'')$ أساسا للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

3)- لتكن G الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right);G(x)=\int_0^1\frac{f(x+t)}{1+e^{-t}}dt$$ ، حيث $f\in E$.

- بين أن $G\in E$ و حدد مثلوث إحداثياتها في الأساس $\mathrm{B}(f_0,f_1,f_2)$.