NOTIONS DE LOGIQUE

EXERCICE 1 :

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

a) Il existe un nombre rationnel dont le carré vaut deux.
b) La somme de deux nombres positifs quelconques est un nombre positif.
c) Le carré de n'importe quel nombre réel est un nombre positif.
d) L'équation $\mathbf{x^2 - 3x + 1 = 0}$ admet une solution réelle.
e) Tout entier naturel est pair ou impair.
f) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.
g) Il y a un entier plus grand que tous les entiers.
h) Si un nombre réel x inférieur de **-1** alors il est strictement négatif.
i) Le produit de deux réels est nul si et seulement si l'un d'entre eux est nul.
j) L'équation **sin x = x** a une et une seule solution dans $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2 :

Exprimer à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

a) f est la fonction nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
b) Le dénominateur **D** de f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
c) Le graphe de f coupe la droite d'équation y = x.
d) f est croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
e) Pour tout point M du plan P, M est sur le cercle C de centre Ω et de rayon R si et seulement si la distance de ΩM à vaut R.
f) L'équation $\mathbf{x^2 = 3}$ n'admet aucune solution rationnelle.
g) Il existe un réel plus petit que tous les réels.
h) Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier relatif p tel que $\mathbf{p \leq x < p + 1}$
i) Tout entier naturel divisible par **4** est un nombre pair.
j) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

EXERCICE 3 :

Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f n'est pas nulle (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
2) Le dénominateur **D** de la fraction ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
3) f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

EXERCICE 4 :

Nier les assertions suivantes :

1) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2) Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.
3) Pour tout entier relatif x, il existe un entier relatif y tel que, pour tout entier relatif z, la relation $\mathbf{z < x}$ implique la relation $\mathbf{z < x + 1}$.
4) $(\forall\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R})(\exists\, \boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}) : \left|\mathbf{x} - \frac{7}{5}\right| < \boldsymbol{\alpha} \Rightarrow |\mathbf{5x - 7}| < \boldsymbol{\varepsilon}$.

EXERCICE 5 :

Donner la négation des propositions suivantes et dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

$(\mathbf{P})$ $(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : \sqrt{\mathbf{1 + x^2}} - |\mathbf{x}| \geq \mathbf{0}$; $(\mathbf{Q})$ $(\exists\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)\ (\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : \frac{\mathbf{x^{2n}}}{\mathbf{1+x}} > \mathbf{1}$

(R) $(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R})\ (\exists\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}) : \mathbf{y < x}$ **;** **(S)** $(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : (\mathbf{x^2 - |x| + 1 \geq 0})$ **et** $(\mathbf{-1 \leq x \leq 1})$

$(\mathbf{T})$ $(\forall\, \mathbf{x} \in [\mathbf{1}, +\infty[\,) : \mathbf{x^2 + x - 2 \geq 0}$; $(\mathbf{U})$ $(\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : (\mathbf{x \geq 0})$ أو $(\mathbf{x \leq 0})$

(V) $(\forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^*)\ (\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}) : \mathbf{x^2 - xy + y^2 = 0}$

EXERCICE 6 :

Donner la négation des propositions suivantes :

(P) $(\forall x \in \mathbb{N}) : x \neq 1 \Rightarrow x > 1$

(Q) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists \alpha > 0) : |x| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| < \alpha$

(R) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x - y = 1 \Rightarrow x > 1$

EXERCICE 7 :

Montrer par Le raisonnement par contre-exemple que les propositions suivantes sont fausses :

(P) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : x + \frac{1}{x} \geq 2$

(Q) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : 2x - 4y \neq 5$

(R) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$

(S) $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

(T) $(\forall x \in]0,+\infty[)(\forall y \in]0,+\infty[) : \sqrt{xy} = \frac{2xy}{x+y}$

(U) $(\forall x \in]0,1[)(\forall y \in]0,1[) : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 1 - xy$

(V) $(\forall x \in]0,1[) : \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$

EXERCICE 8 :

Soient les quatre assertions suivantes :

(P) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y > 0$; **(Q)** $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x + y > 0$

(R) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x + y > 0$; **(S)** $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : y^2 > x$

1. Les assertions précédentes sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leurs négations.

EXERCICE 9 :

1) Soient a et b deux réels. Montrer que : $|a| < 1 \text{ et } |b| < 1 \Rightarrow |a+b| < |1+ab|$
2) Soient x et y deux réels non nuls. On considère les deux propositions : **(P)** : $2x + 4y = 1$ et **(Q)** : $\frac{1}{x^2+y^2} \leq 20$. Montrer que $(P \Rightarrow Q)$.

EXERCICE 10 :

1) Soient a, b et c des réels.
   a) Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$
   b) Montrer que : $a^3 + a = b^3 + b \Leftrightarrow a = b$
2) Soit x un réel positif($x \in \mathbb{R}^+$).
   a) Montrer que : $\frac{\sqrt{x}}{x^2-x+1} \leq \frac{4}{3}\sqrt{x}$
   b) Montrer que : $\sqrt{2x+2} - \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$
3) Soient a et b deux réels de l'intervalle $]-1;1[$.
   a) Montrer que : $-1 \leq \frac{a+b}{1+ab} \leq 1$
   b) Montrer que : $|a+b| \leq |1+ab|$

EXERCICE 11 :

Montrer que :

1) $(\forall x \in [1,+\infty[)(\forall y \in [4,+\infty[) : \sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } y = 8$

2) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{y^2+1} + y\right) = 1$

3) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |a+b| \leq |1+ab| \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1) \geq 0$

4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

5) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

EXERCICE 12 :

Soient x et y deux réels strictement positifs. Montrer que : $x < y \Leftrightarrow \frac{x}{y} < \frac{2x+5y}{5x+2y} < \frac{y}{x}$

EXERCICE 13 :

En utilisant un raisonnement par la contraposée, démontrer que :

1) $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{x}{2}$ **2)** $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \neq 1$

3) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(xy-1)(x-y) \neq 0 \Rightarrow x(y^2+y+1) \neq y(x^2+x+1)$

4) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$: $(x \neq 1 \text{ et } y \neq 1) \Rightarrow x + y - xy \neq 1$

EXERCICE 14 :

1) Soient a et b deux réels tels que $a \neq -3b$ montrer que : $a \neq \frac{-14b}{3} \Rightarrow \frac{2a+b}{a+3b} \neq 5$
2) Soient x et y deux réels. Montrer que : $x \neq y \Rightarrow x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$
3) Soit n un entier naturel. Montrer que : $n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$

EXERCICE 15 :

Montrer par disjonction des cas que :

1) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $n^2 + n + 1$ est un nombre impair.
2) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $n^3 - n$ est un multiple de 3.
3) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
4) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $x - \sqrt{x^2+1} < 0$
5) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}(x+2) > 0$
6) $(\forall x \in \mathbb{R})$: $|x-1| \leq x^2 - x + 1$

EXERCICE 16 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes **:** (E_1)**:** $3 + 4|x-1| = 2x + 5$ **;** (E_2) **:** $2|x-1| = |x|$

(E_3) $|x-1| + |2x-3| = 6$ **;** (E_4) $|x-2| + |x-3| = x + 2$

(E_5) $2x^2 - |x-3| - 4 = 0$ **;** (E_6) $\sqrt{x+3} = x + 1$

(E_7) $x^2 - 2(1+m)x + 4 = 0$ avec **m** est un paramètre réel.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : (I_1) $\sqrt{2x^2+1} > 2x - 4$

(I_2) $\sqrt{-x^2+6x-5} \leq x - 3$ **;** (I_3) $|2x-1| + |2x+1| + |x| \geq 4$

(I_4) $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivent : (S_1) $\begin{cases} 2|x+1| - y = 0 \\ |x+2| + 2y = 6 \end{cases}$

(S_2) $\begin{cases} |x| + y = 2 \\ |x-y+3| = 4 \end{cases}$ **;** (S_3) $\begin{cases} mx + 3y = m^2 \\ 3x + my = 9 \end{cases}$

EXERCICE 17 : ☹ Raisonnement par l'absurde ☹

1) Soient x et y deux réels. Montrer que le système (S_1) **:** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3y - 2x = 3 \end{cases}$ n'admet aucun solution.
2) Soient x, y et z trois réels. Montrer que le système (S_2) **:** $\begin{cases} 2x - 3z > 3 \\ 3y - 2x \geq 3 \\ y - z \leq 2 \end{cases}$ n'admet aucun solution.
3) Montrer que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x) = 2x^4 + 12x - 1$
4) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})$: $4\cos x \neq x^2 - 4x + 12$
5) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$

EXERCICE 18 :

On considère le triangle **ABC** tel que les longueurs de ses cotés sont $4a$, $3a$ et $6a$ $(a > 0)$.
Montrer que **ABC** n'est pas rectangle.

EXERCICE 19 :

Soit n un entier naturel

1) Montrer que si n est pair alors $\mathbf{n^2}$ est pair aussi.
2) Montrer que si $\mathbf{n^2}$ est pair alors n est pair aussi.
3) a) Montrer que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$
   b) Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{\mathbf{n^2+1}} \notin \mathbb{N}$.
   c) Soit $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*$, considérons $\mathbf{P(n) = n^2+7n+12}$. Montrer qu'il n'existe pas de n tel que $\sqrt{\mathbf{P(n)}} \in \mathbb{N}$**.**

EXERCICE 20 :

1) Soient a et b deux entiers naturels tels que $a > b$. Montrer que $\frac{\mathbf{a^2+b^2}}{\mathbf{a^2-b^2}} \notin \mathbb{N}$**.**
2) Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b+1}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a+1}}$ alors $\mathbf{a = b}$.
3) Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que : $\mathbf{abc > 1}$ et $\mathbf{a+b+c} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}$
   a) Montrer que a, b et c sont distincts de **1**.
   b) Montrer que $\mathbf{min(a,b,c) < 1}$.

EXERCICE 21 :

Soit n un entier naturel.

1) Déterminer les restes de la division euclidienne de $\mathbf{n^2}$ par **5**.
2) Montrer que : $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\sqrt{\mathbf{5n+7}} \notin \mathbb{N}$**.**

EXERCICE 22 :

Soit n un entier naturel.

1) Montrer que : $\mathbf{(4n+1)^2 \leq 16n^2+8n+3 \leq (4n+2)^2}$**.**
2) En déduire que : $\sqrt{\mathbf{n^2}+\sqrt{4\,\mathbf{n^2}+\sqrt{\mathbf{16n^2+8n+3}}}} \notin \mathbb{N}$**.**

EXERCICE 23 :

Démontrer par récurrence que :

1) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{n^3-n}$ est un multiple de **3**.
2) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{3^{2n}-1}$ est un multiple de **4**.
3) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{n(n^2+5)}$ est un multiple de **3**.
4) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{6}$ divise le nombre $\mathbf{n(n+1)(n+2)}$.
5) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$: $\mathbf{3^{2n}-2^n}$ est divisible par **7.**
6) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{2^{3n}-1}$ est divisible par **7.**
7) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{2^{3n+2}-4}$ est divisible par **7.**
8) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{3^{2n+1}+2^{n+2}}$ est divisible par **7.**
9) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{3^{2n+1}+4^{n+1}-2(-1)^n}$ est divisible par **5**
10) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{4^n-3n-1}$ est divisible par **9**.
11) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$: $\mathbf{10^n-1}$ est divisible par **9.**
12) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{10^n-(-1)^n}$ est divisible par **11.**
13) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$: $\mathbf{3^{2n}+2^{6n-5}}$ est divisible par **11**.
14) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\mathbf{4^{2n+2}-1}$ est divisible par **15**.
15) $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N}^*)$: $\mathbf{3.5^{2n-1}+2^{3n-2}}$ est divisible par **17**.

EXERCICE 24 :

Démontrer les énoncés suivants par récurrence :

1- $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{2^k = 2^{n+1}-1}$ 2- $(\forall\, \mathbf{n} \in \mathbb{N})$: $\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \mathbf{k} = \frac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}$

3- $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 4- $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$ 6- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

7- $(\forall n \in \mathbb{N})$: $\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$ 8- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

EXERCICE 25 :

Soit x un réel strictement positif.

1) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $(1+x)^n \geq 1 + nx.$
2) En déduire que : a) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $2^n \geq 1 + n$
   b) $(\forall n \in \mathbb{N})$: $3^n \geq n$
   c) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $(1+n)^n \geq 2n^n$

EXERCICE 26 :

Soit f une fonction numérique définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ tel que :

$(\forall n \in \mathbb{N})$: $f(n+1) = 2f(n) + 5$ et $f(0) = 3$

1) Déterminer **f(1)** et **f(2).**
2) Démontrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $f(n) = 2^{n+3} - 5$

EXERCICE 27 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose : $f(n) = 10^{3n+2} + 10^{3n+1} + 1$

1) Calculer **f(0)** et **f(1)**.
2) Montrer que : $\exists\, k \in \mathbb{N} : f(1) - f(0) = 111k$
3) Calculer $f(n+1)$ en fonction de $f(n)$.
4) En déduire que $f(n)$ est divisible par **111** pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 28 :

Soit α une solution de l'équation $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 3$ tel que $\alpha > 0$

1) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = 3\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}\right)$
2) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) \in \mathbb{N}$

EXERCICE 29 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $f(n) = \underbrace{11 \ldots \ldots \ldots \ldots 1}_{n \text{ fois}}$

1) Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $f(n+1) = 10f(n) + 1$
2) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $f(n) = \frac{1}{9}(10^n - 1)$
3) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$: $\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$.

EXERCICE 30 :

1) a) Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Montrer que : $p + q\alpha = 0 \Rightarrow p = q = 0$
   b) montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists!\, p \in \mathbb{N})(\exists!\, q \in \mathbb{N}) : p + q\sqrt{2} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$
2) Soient f et g deux fonctions définies de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ tels que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n) + \sqrt{2}g(n) = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^n$$

   a) Déterminer $f(0); g(0); f(1); g(1); f(2); g(2)$.
   b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n+1) = 3f(n) + 4g(n)$ et $g(n+1) = 2f(n) + 3g(n)$
   c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \left(f(n)\right)^2 - 2\left(g(n)\right)^2 = 1$
   d) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(n) - \sqrt{2}g(n) = \left(3 - 2\sqrt{2}\right)^n$
   e) En déduire $f(n)$ et $g(n)$ en fonction de n.