Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 13$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $u_n \prec 14$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = 14 - u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, et écrire v_n en fonction de n.

   b. En déduire que $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et calculer la limite de (u_n).

   c. Déterminer la valeur de l'entier naturel n pour que $u_n \succ 13,99$

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_1 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \succ 2$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $v_n = \frac{3}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que $v_{n+1} = \frac{1+u_n}{u_n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmétique.

   b. Exprimer (v_n) en fonction de n, puis en déduire que $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $u_1 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{25}{10 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et montrer par récurrence que $5 - u_n \succ 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par $v_n = \frac{5}{5 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que $v_{n+1} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et vérifier que $v_{n+1} - v_n = 1$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   b. Montrer que $v_n = n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis déduire que $u_n = 5 - \frac{5}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$.
2. a) Montrer par récurrence que $u_n \prec 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a) En utilisant la question (1), montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{10}{11}$ puis écrire v_n en fonction de n.

   b) Montrer que $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, et calculer la limite de (u_n) .

Exercice 5 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \succ 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Vérifier que $1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis en déduire que $1 - v_n \succ 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   b. Montrer que $u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$
3. a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{7}$ puis écrire v_n en fonction de n.

   b. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ puis déduire la limite de (u_n).

Exercice 6 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 8u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer par récurrence que $u_n \succ 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. On pose $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 5 puis écrire v_n en fonction de n.

   b. Montrer que $u_n = \frac{1}{3\times 5^n - 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$ puis calculer la limite de (u_n).

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. a) Vérifier que $u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   b) Montrer par récurrence que $u_n \succ \dfrac{1}{3}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{6}$, et écrire v_n en fonction de n.

3. Montrer que $u_n = \dfrac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 8:

On considère (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n + 3}{2u_n + 6}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Montrer que : $u_n \geq \dfrac{3}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. Montrer que : $(\forall n \in IN) U_{n+1} - \dfrac{3}{2} \leq \dfrac{4}{9}\left(U_n - \dfrac{3}{2}\right)$.
3. En déduire que : $U_n - \dfrac{3}{2} \leq \left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.
5. Soit (v_n) la suite numérique définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \dfrac{2u_n - 3}{u_n + 1}$

   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, puis exprimer V_n en fonction de n.

   b. Exprimer U_n en fonction de n, puis calculer une $2^{\text{ème}}$ fois $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$