المستوى : 2بك.فك1+2	فرض في مادة الرياضيات	الثانوية التأهيلية وادي الذهب تيفلت
المدة : 1س45د	A.Iaagoubi	2012/2013

السلم

التمرين 1 (3ن)

1- أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-2x)$ و $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$ — 1+1

2- رتب الأعداد : $a=\sqrt[3]{3}$ و $b=\sqrt[4]{7}$ و $c=\sqrt[6]{10}$ ترتيباً تزايديا . — 1

التمرين 2 (5ن)

1- نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}; x>1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-1}{12}; x\leq 1 \end{cases}$$

أ- ادرس إتصال f في 1. — 1

ب- هل f متصلة على $\mathbb{R}$ ؟ — 1

2- نعتبر الدالة g المعرفة كالتالي : $g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{|x-2|-2}$

أ- حدد D_g مجموعة تعريف g و اكتب g(x) بدون قيمة مطلقة . — 1+0,5

ب- هل g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4 ؟ ما هو في حالة الجواب بنعم ؟ — 1+0,5

التمرين 3 (5ن)

2- نضع : $h(x)=2x^3-5x^2-3$

أ- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $I=[1.3]$. — 1,5

ب- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا في المجال $J=[2.3]$. — 1,5

ج- حدد صورة المجالين $I=[1.3]$ و $J=[2.3]$ ب h. — 1+1

التمرين4 (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x^3-3x}$

1- بين ان مجموعة تعريف f هي $D_f=\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[$. — 1

2- أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. — 0,5

3- ادرس اشتقاق f على يمين $\sqrt{3}$ و اعط التاويل الهندسي للنتيجة المحصلة. — 2

4- أحسب $f'(x)$ و ادرس اشارتها لكل x من $I=\left]\sqrt{3};+\infty\right[$. — 2

5- بين أن قصور f على I تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده . — 1,5

☺ Bonne chance ☺

التمرين 1

-1

$$\lim_{+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-2x)=\lim_{+\infty} x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-2x$$

$$=\lim_{+\infty} x(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^2}}-2)=-\infty$$

اذن $\boxed{\lim_{+\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-2x)=-\infty}$ (1ن)

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt[3]{x+7}-2)(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4)}{(x-1)(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt[3]{x+7}^2+2\sqrt[3]{x+7}+4}=\frac{1}{12}$$

اذن $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{1}{12}}$ (1ن)

-2 لدينا

$$a=\sqrt[3]{3}=\sqrt[3.4]{3^4}=\sqrt[12]{81}$$

$$b=\sqrt[4]{7}=\sqrt[4.3]{7^3}=\sqrt[12]{343}$$

$$c=\sqrt[6]{10}=\sqrt[6.2]{10^2}=\sqrt[12]{100}$$

و بما ان $81<100<343$ فان $\sqrt[12]{81}<\sqrt[12]{100}<\sqrt[12]{343}$

و بالتالي $\boxed{a<c<b}$ (1ن)

التمرين 2

-1 نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1};x>1 \\ f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-1}{12};x\le1 \end{cases}$$

أ- لندرس إتصال f في 1. لدينا $f(1)=\frac{\sqrt{4}-1}{12}=\frac{1}{12}$

- على يمين 1 : لدينا $\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{1}{12}$ إذن f متصلة على يمين 1.

- على يسار1 :

f متصلة على يسار1 لأنها خارج :

❖ مجموع دالة ثابتة 1 و مركب دالة حدودية و دالة الجذر المربع.

❖ دالة ثابتة

و منه f متصلة في 1. (1ن)

ب- لندرس إتصال f على $\mathbb{R}$.

- f متصلة على $]-\infty,1[$ لأنها خارج :

❖ مجموع دالة ثابتة 1 و مركب دالة حدودية و دالة الجذر المربع

❖ دالة ثابتة

-

- f متصلة على $]1,+\infty[$ لأنها خارج :

❖ مجموع دالة ثابتة و مركب دالة حدودية و دالة $\sqrt{\ }$

❖ دالة ثابتة .

- f متصلة في 1.

إذن f متصلة على على $\mathbb{R}$. (1ن)

2- نعتبر الدالة g المعرفة كالتالي : $g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{|x-2|-2}$

~~3~~ $g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{|x-2|-2}$

أ -

$$(x)_h \Leftrightarrow |x-2|-2\neq 0$$

$$\Leftrightarrow |x-2|=2$$

$$\Leftrightarrow x-2\neq 2 \text{ و } x-2=-2$$

$$\Leftrightarrow x\neq 4 \text{ و } x\neq 0$$

أذن $\boxed{D_h=]-\infty,0[\cup]0,4[\cup]4,+\infty[}$ (1ن)

- اذا كان $x\geq 2$ فإن $|x-2|=x-2$

إذن $g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}$

- اذا كان $x<2$ فإن $|x-2|=2-x$

إذن $g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{-x}=\dfrac{-x^2+2x+8}{x}$

و بالتالي

$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4};x\geq 2;x\neq 4 \\ g(x)=\dfrac{-x^2+2x+8}{x};x<2;x\neq 0\end{cases}$$

(0,5ن)

ب- $\lim\limits_{x\to 4} g(x)=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 4}x+4=6 \in\mathbb{R}$ (1ن)

إذن g تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4 هو

$$\begin{cases} g_1(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x-4};x\geq 2;x\neq 4 \\ g_1(x)=\dfrac{-x^2+2x+8}{x};x<2;x\neq 0 \\ g_1(4)=6\end{cases}$$

(0,5ن)

التمرين 3 (5ن)

$$h(x)=2x^3-5x^2-3$$

ا

- أ لنبين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $I=[1.3]$.

h متصلة على $I=[1.3]$ لانها حدودية و $h(1)=-6$ و $h(3)=6$

إذن $h(1).h(3)<0$

و منه المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $I=[1.3]$ (1,5 ن)

- ب لنبين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا في المجال $J=[2.3]$.

- h متصلة على $I=[1.3]$ لانها حدودية
- و $h(2)=-7$ و $h(3)=6$ إذن $h(2).h(3)<0$
- و $h'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$$x\in[2.3]\Rightarrow 2x>0;3x-5>0\Rightarrow 2x(3x-5)>0$$

إذن h تزايدية قطعا على $J=[2.3]$

و منه المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلاً وحيدا في المجال $J=[2.3]$ (1,5 ن)

- ج لنحدد صورة المجال $I=[1.3]$ و $J=[2.3]$ ب h.

h متصلة على $I=[1.3]$ و $h'(x)=6x^2-10x=2x(3x-5)$

$$h'(x)=2x(3x-5)=0\Leftrightarrow x=0,x=\frac{5}{3}$$

x	1	5/3	3
h'(x)	-	0	+
h(x)	6- ↘		↗ 6

$h(\frac{5}{3})=-\frac{266}{27}$ القيمة الدنوية و 6 القيمة القصوية

إذن $h(J)=\left[-\frac{266}{27};6\right]$ (1ن)

- لنحدد صورة المجال $J=[2.3]$

h متصلة و تزايدية قطعا على $J=[2.3]$ و $h(2)=-7$ و $h(3)=6$

إذن $h([2.3])=[h(2);h(3)]=[-7;6]$

إذن $h(I)=[-7;6]$ (1ن)

التمرين 4 (7 ن)

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\sqrt{x^3-3x}$

1- لنبين ان مجموعة تعريف f هي $D_f=\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

$$x\in D_f \Leftrightarrow x^3-3x\geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-3)\geq 0 \Leftrightarrow x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0$$

إذن $\boxed{D_f=\left[-\sqrt{3};0\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[}$ **(1ن)**

2- لنحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لان $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3-3x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ **(0.5ن)**

3- لندرس اشتقاق f على يمين $\sqrt{3}$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{f(x)-f(\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{\sqrt{x^3-3x}}{x-\sqrt{3}}=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\frac{\sqrt{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}}{x-\sqrt{3}}$$

$$=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\sqrt{\frac{x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})^2}}=\lim_{x\to\sqrt{3}^+}\sqrt{\frac{x(x+\sqrt{3})}{x-\sqrt{3}}}=+\infty$$

إذن f غير ق.ا على يمين $\sqrt{3}$. **(1ن)**

التاويل الهندسي للنتيجة المحصلة.

المنحنى يقبل نصف مماس على يمين النقطة التي افصولها $\sqrt{3}$ موجه نحو الاعلى معادلته $x=\sqrt{3}$ **(1ن)**

4- انحسب $f'(x)$ لكل x من $I=\left]\sqrt{3};+\infty\right[$.

$$\forall x\in I=\left]\sqrt{3};+\infty\right[\quad f'(x)=\frac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}}=\frac{3(x^2-1)}{2\sqrt{x^3-3x}}=\frac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x^3-3x}}$$

إذن $\boxed{f'(x)=\frac{3(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x^3-3x}}}$ **(1ن)**

$$x\in I=\left]\sqrt{3};+\infty\right[\Rightarrow 3(x-1)(x+1)>0 \quad \text{و} \quad 2\sqrt{x^3-3x}>0$$

إذن $\boxed{\forall x\in I=\left]\sqrt{3};+\infty\right[\ f'(x)>0}$ **(1ن)**

5- لنبين أن قصور f على I تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده .

- f متصلة على I (مركب حدودية دالة الجذر المربع)
- تزايدية قطعا على I

إذن فهي تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J بحيث

$$\boxed{J=\left]\lim_{\sqrt{3}^+} f(x);\lim_{+\infty} f(x)\right[=\left]0;+\infty\right[}$$ **(1.5ن)**