فضاء الرياضيات بالثانوي

تصحيح موضوع مادة الرياضيات ، شعبة العلوم الرياضية ، الإمتحان الوطني دورة يونيو 2010

تقديـــم : ذ. الوظيفي

ثانوية ابن تومرت مراكش

==

□□□□□□ 1 :

الجزء الأول

1. . نبين أن * تبادلي في I :

ليكن a و b عنصرين من I .

لدينا :

$$a*b=e^{\ln a.\ln b}$$
$$=e^{\ln b.\ln a}$$
$$=b*a$$

إذن : $a*b=b*a$ لكل a و b من I .

ومنه : $*$ تبادلي في I.

. نبين أن * تجميعي في I :

لتكن a و b و c عناصر من I .

لدينا :

$$(a*b)*c=e^{\ln a.\ln b}*c$$
$$=e^{(\ln a.\ln b).\ln c}$$
$$=e^{\ln a.(\ln b.\ln c)}$$
$$=a*e^{\ln b.\ln c}$$
$$=a*(b*c)$$

ومنه لكل a و b و c من I *:* $(a*b)*c=a*(b*c)$.

وبالتالي : $*$ تجميعي في I.

2.نبين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا :

القانون $*$ تبادلي في I

ومنه ε عنصر محايد بالنسبة للقانون * *في* **I** ***يكافئ*** $(\forall a\in I):\ a*\varepsilon=a$

لدينا :

$$\begin{aligned}(\forall a\in I)\ :\ a*\varepsilon=a &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ e^{\ln a.\ln\varepsilon}=a\\ &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ln a.\ln\varepsilon=\ln a\\ &\Leftrightarrow (\forall a\in I):\ (\ln\varepsilon-1).\ln a=0\\ &\Leftrightarrow \ln\varepsilon=1\\ &\Leftrightarrow \varepsilon=e\end{aligned}$$

ومنه : * يقبل عنصرا محايدا في I وهو العدد **e** .

wadiiifi@hotmail.com

3.أ. نبين ان $(I-\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

القانون * تبادلي وتجميعي في I .

إذن * تبادلي وتجميعي في $I-\{1\}$.

ولدينا : $a*\varepsilon=a \quad : \quad (\forall a\in I-\{1\})$

إذن ε عنصر محايد بالنسبة للقانون * في $I-\{1\}$.

ليكن a عنصرا من $I-\{1\}$.

العدد b مماثل a في $I-\{1\}$ بالنسبة للقانون * يكافئ $a*b=e$ (القانون * تبادلي في I)

يكافئ $e^{\ln a.\ln b}=e$

يكافئ $\ln b=\dfrac{1}{\ln a}$

يكافئ $b=e^{1/\ln a}$

كل عنصر من $I-\{1\}$ يقبل مماثلا في $I-\{1\}$. (وحيدا بحكم تجميعية القانون *)

وعليه فإن $(I-\{1\},*)$ زمرة تبادلية .

3.ب. نبين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I-\{1\},*)$.

المجموعة $]1,+\infty[$ غير فارغة (تحتوي على 2010 سنة الباكالوريا).

ليكن a و b عنصرين من $]1,+\infty[$. b' مماثل b في $]1,+\infty[$

لدينا :

$$a*b'=a*e^{\frac{1}{\ln b}}$$
$$=e^{\ln a.\ln e^{\frac{1}{\ln b}}}$$
$$=e^{\frac{\ln a}{\ln b}}$$

ولدينا $\ln a$ و $\ln b$ من $]0,+\infty[$ فإن $1\prec a*b'$

إذن لكل عنصرين a و b من $]1,+\infty[\quad : \quad a*b'\in I$

ومنه : $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I-\{1\},*)$.

4.أ. نبين أن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون × :

لتكن a و b و c عناصر من I .

لدينا :

$$a*(b\times c)=e^{\ln a.\ln b\times c}$$
$$=e^{\ln a.(\ln b+\ln c)}$$
$$=e^{(\ln a.\ln b)+(\ln a.\ln c)}$$
$$=e^{\ln a.\ln b}\times e^{\ln a.\ln c}$$
$$=(a*b)\times(a*c)$$

wadiiifi@hotmail.com

ومنه لكل a و b و c عناصر من I : $a*(b\times c)=(a*b)\times(a*c)$

وبالتالي * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$. (* تبادلي في I)

4.ب . نبين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي :

واضح أن القانون $\times$ تجميعي ، تبادلي ويقبل عنصرا محايدا وهو 1 في I و كل عنصر a من I يقبل عنصرا مقلوبا وهو $\frac{1}{a}$

وبالتالي . $(I,\times)$ زمرة تبادلية عنصرها المحايد هو 1.

ولدينا . $(I-\{1\},*)$ زمرة.

.القانون * توزيعي بالنسبة للقانون $\times$.

.القانون * تبادلي في I .

ومنه $(I,\times,*)$ جسم تبادلي .

الجزء الثاني :

1. نحسب A^2 و A^3 :

$$A^2=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\-2&-2&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}4&4&0\\-4&-4&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

2.نبين أن A لا يقبل مقلوبا :

نفترض أن A يقبل مقلوبا . B

ومنه $A.B=I$

وبالتالي : $A^2\times A\times B=A^2$ أي $A^2=0$ وهذا غير صحيح .

ومنه A لا يقبل مقلوبا .(لاحظ أن A قاسم للصفر).

□□□□□□ 2 :

1.أ. نحدد الجذرين المربعين للعدد $3+4i$:

لدينا :

$$3+4i=4+3i-1$$
$$=(2+i)^2$$

ومنه :

الجذران المربعان للعدد العقدي $3+4i$ هما : $2+i$ و $-2-i$

1.ب. نحل في C المعادلة : $(E)\quad 4z^2-10iz-7-i=0$

المميز المختصر للمعادلة (E) هو $\Delta'=3+4i$

ومنه:

حلي المعادلة هما : $\frac{-1}{2}+i$ و $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$.

.2

بما أن $\operatorname{Re}(a)\prec 0$ فإن $a=\frac{-1}{2}+i$ و $b=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

2.أ. نتحقق أن : $\frac{b}{a}=1-i$

(تعويض مباشر) .

2.ب.نستنتج أن المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

لدينا :

$$\frac{a-b}{a-0}=1-\frac{b}{a}$$
$$=1-(1-i)$$
$$=i$$

أي : $\frac{z_A-z_B}{z_A-z_O}=i$

ومنه :

المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A .

3.أ. نحدد لحق D :

لدينا D صورة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

إذن : $z_D-z_C=e^{i\frac{\pi}{2}}.(z_B-z_C)$

ومنه :

$$d=i\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i-c\right)+c$$

3.ب . نحدد لحق L :

بما أن L صورة D بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AO}$

فإن $z_L=z_D+z_{\overrightarrow{AO}}$

أي :

$$l=-1-\frac{1}{2}i-ic+c$$

3.ج. نحدد الكتابة الجبرية للعدد $\dfrac{l-c}{a-c}$

لدينا :

$$\frac{l-c}{a-c}=\frac{-1-\frac{1}{2}i-ic}{-\frac{1}{2}+i-c}$$

$$=\frac{i\left(i-\frac{1}{2}-c\right)}{\frac{-1}{2}+i-c}$$

$$=i$$

نستنتج أن

لدينا $\dfrac{l-c}{a-c}=i$ و $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن $\left\|\dfrac{l-c}{a-c}\right\|=1$ و $\arg\left(\dfrac{l-c}{a-c}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

وبالتالي : $LC=AC$ و $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CL}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

ومنه :

المثلث ACL قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C .

التمرين الثالث :

1.نحدد مجموعة الأعداد الطبيعية m حيث $m^2+1\equiv 0\ [5]$ **:**

لدينا :

$$\begin{aligned} m^2+1\equiv 0\ [5] &\Leftrightarrow m^2-4\equiv 0\ [5]\\ &\Leftrightarrow (m-2)(m+2)\equiv 0\ [5]\\ &\Leftrightarrow m-2\equiv 0\ [5]\quad ou\quad m+2\equiv 0\ [5]\\ &\Leftrightarrow m\equiv 2\ [5]\quad ou\quad m\equiv 3\ [5]\end{aligned}$$

ومنه :

الأعداد الصحيحة الطبيعية m التي تحقق $m^2+1\equiv 0\ [5]$ هي :
$m=2+5k$ أو $m=3+5k$ حيث k عدد صحيح طبيعي .

2.أ.نبين أن : $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\ [p]$

لدينا : $n^2+1\equiv 0\ [p]$

إذن : $n^2\equiv -1\ [p]$

wadiiifi@hotmail.com

وبالتالي : $(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)^{1+2k} \quad [p]$

ومنه :

$$(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \ [p]$$

2ب .نبين أن n و p أوليان فيما بينهما .

بما أن p عدد أولي

فإن $p \wedge n = 1$ أو $p \wedge n = p$

نفترض أن n و p غير أوليين فيما بينهما أي $p \wedge n \neq 1$

وبالتالي $p \wedge n = p$

أي : p / n

أي $n \equiv 0 \ [p]$

ومنه : $n^2 \equiv 0 \ [p]$

وحيث أن $n^2 \equiv -1 \ [p]$

فإن : $-1 \equiv 0 \ [p]$ وهذا غير ممكن .

ومنه

n و p أوليان فيما بينهما .

2.ج. نستنتج أن $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \ [p]$

لدينا p أولي و $p \wedge n = 1$

إذن حسب المحترم فيرما : $n^{p-1} \equiv 1 \ [p]$

أي : $n^{2+4k} \equiv 1 \ [p]$ لأن $p = 3+4k$.

ومنه :

$$(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \ [p]$$

.

2.د . نفترض وجود عدد طبيعي n حيث $n^2+1 \equiv 0 \ [p]$.

إذن : $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \ [p]$ و $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \ [p]$

وبالتالي $-1 \equiv 1 \ [p]$

أي $2 \equiv 0 \ [p]$

أي $p / 2$ وهذا غير ممكن لأن p عدد أولي أكبر من أو يساوي 3.

ومنه :

لايوجد عدد طبيعي n حيث $n^2+1 \equiv 0 \ [p]$.

wadiiifi@hotmail.com

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

$$f(x)=4xe^{-x^2}$$

1.نحسب نهاية f بجوار $+\infty$

لدينا.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2}{e^{x^2}}\cdot\frac{1}{x}$$

نضع $t=x^2$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^t/t}$$

$$=0$$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

إذن : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

2.ندرس تغيرات f :

الدالة $x\mapsto -x^2$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ باعتبارها دالة حدودية .

إذن الدالة $x\mapsto e^{-x^2}$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.

ولدينا : الدالة $x\mapsto 4x$ قابلة للإشتقاق على المجال $[0,+\infty[$ باعتبارها دالة حدودية .

إذن f قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ (جداء دالتين قابلتين للإشتقاق على مجال)

ولدينا لكل x من $[0,+\infty[$:

$$f'(x)=4e^{-x^2}-8x^2e^{-x^2}$$

$$=4e^{-x^2}(1-2x^2)$$

بما أن : $4e^{-x^2}\succ 0$ لكل x من $[0,+\infty[$.

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-2x^2$ على $[0,+\infty[$.

جدول تغيرات f هو :

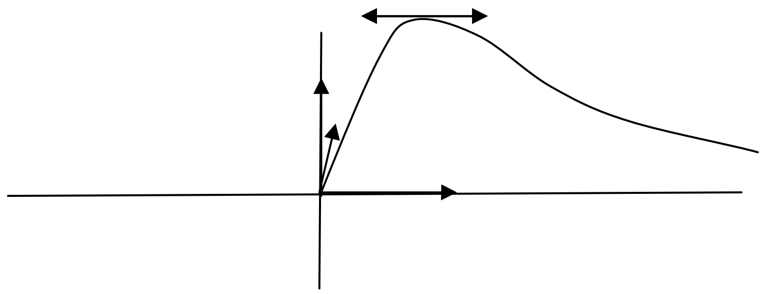
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	↗		↘	0

1.معادلة نصف مماس منحنى f في أصل المعلم هي :

wadiiifi@hotmail.com

$\begin{cases} y = f'(0)(x-0)+f(0) \\ x \geq 0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \end{cases}$.

التمثيل المبياني لمنحنى f هو :



1.حساب التكامل :

$$\int_0^1 f(x)dx = -2\int_0^1 -2xe^{-x^2}\,dx$$
$$= -2\left[e^{-x^2}\right]_0^1$$
$$= 2-\frac{2}{e}$$

ومنه :

$$\boxed{\int_0^1 f(x)dx = 2-\frac{2}{e}}$$

حساب المساحة :

نعلم أن مساحة الحيز هي $\int_0^1 |f(x)|dx$ بوحدة قياس المساحة وهي $4cm^2$.

ومنه مساحة الحيز المقترح هي : $\left(8-\frac{8}{e}\right)\ cm^2$.

الجزء الثاني :

1.أ.نبين أن : $e^{-x^2} \prec e^{-x}$ لكل x من $]1,+\infty[$.

ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$.

إذن $x \prec x^2$

وبالتالي : $-x^2 \prec -x$ أي $e^{-x^2} \prec e^{-x}$

ومنه $e^{-x^2} \prec e^{-x}$ لكل x من $]1,+\infty[$.

1.ب. نستنتج نهاية f_n عند ما تؤول x إلى $+\infty$.

ليكن x عنصرا من $]1,+\infty[$.

لدينا : $e^{-x^2} \prec e^{-x}$

إذن : $0 \prec f_n(x) \leq 4x^n e^{-x}$

وحيث أن : $\lim_{x\mapsto+\infty} 4x^n e^{-x} = \lim_{x\mapsto+\infty} 4.\frac{1}{\frac{e^x}{x^n}}$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{e^x}{x^n} = +\infty$ لأن $n \in N^*$.

فإن $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=0$.(Le théorème des gendarmes).

2.ندرس تغيرات f_n :

الدالة f_n قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ ... تعليل شبيه للوارد في الجواب على السؤال الثاني في الجزء الأول ....

ولكل x من $[0,+\infty[$ لدينا :

$$f_n'(x)=4x^{n-1}e^{-x^2}\left(n-2x^2\right).$$

جدول تغيرات الدالة f_n هو :

x	0		$\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	+	0	-	
f	|| 0	↗		↘	0

3. نبين وجود عدد حقيقي وحيد u_n من $]0,1[$ حيث $f_n(u_n)=1$.

لدينا $n\geq 2$ إذن : $\sqrt{\frac{n}{2}}\geq 1$.

ومنه $[0,1]\subset\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

ولدينا الدالة f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $\left[0,\sqrt{\frac{n}{2}}\right]$.

وبالتالي الدالة f_n متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,1]$.

ولدينا $f_n(0)\prec 1$ و $f_n(1)\succ 1$.

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $f_n(x)=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال المفتوح $]0,1[$.

أي أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n حيث $f_n(u_n)=1$.

4.أ . نبين أن لكل عدد طبيعي n حيث $2\leq n$: $f_{n+1}(u_n)=u_n$

ليكن n عددا طبيعيا حيث $2\leq n$.

لدينا :

$$\begin{aligned}f_{n+1}(u_n)&=4(u_n)^{n+1}.e^{-u_n^2}\\&=u_n.4(u_n)^n.e^{-u_n^2}\\&=u_n.f_n(u_n)\end{aligned}$$

ولدينا : $f_n(u_n)=1$ ،

إذن : $f_{n+1}(u_n)=u_n$.

ومنه :

wadiiifi@hotmail.com

لكل عدد طبيعي n حيث $2 \le n$: $f_{n+1}(u_n) = u_n$

4.ب. نبين أن (u_n) تزايدية قطعا .

ليكن n عددا طبيعيا حيث $2 \le n$.

لدينا : $f_{n+1}(u_n) = u_n$ و $u_n \in]0,1[$

إذن : $f_{n+1}(u_n) \prec 1$

ولدينا : $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$

إذن : $f_{n+1}(u_n) \prec f_{n+1}(u_{n+1})$.

وحيث أن الدالة f_{n+1} متصلة وتزايدية قطعا على $]0,1[$ (تقابل)

فإن $u_n \prec u_{n+1}$

ومنه لكل عدد طبيعي n حيث $2 \le n$: $u_n \prec u_{n+1}$

وهذا يعني أن

المتتالية (u_n) تزايدية قطعا .

تقارب المتتالية (u_n) :

المتتالية (u_n) تزايدية قطعا ومكبورة بالعدد 1

إذن : (u_n) متقاربة .

5.أ.نبين أن $0 \prec l \le 1$

لدينا (u_n) تزايدية قطعا

إذن فهي مصغورة بحدها الأول u_2 .

ومنه لكل عدد طبيعي n حيث $2 \le n$: $u_2 \prec u_n \prec 1$

وبالتالي : $u_2 \le \lim u_n \le 1$

وحيث أن $0 \prec u_2$ فإن $0 \prec l \le 1$.

5.ب.نبين أن لكل عدد طبيعي n حيث $2 \le n$: $-\dfrac{\ln 4}{n} \prec \ln(u_n) \prec \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln 4}{n}$.

ليكن n عددا طبيعيا حيث $2 \le n$.

لدينا $f_n(u_n) = 1$

إذن : $4(u_n)^n = e^{(u_n)^2}$.

ولدينا $0 \prec u_n \prec 1$

إذن : $1 \prec e^{u_n} \prec e$

أي $1 \prec 4(u_n)^n \prec e$

وحيث أن الدالة ln تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

...fi@hotmail.com

فإن $0 \prec \ln 4(u_n)^n \prec 1$

ومنه $0 \prec \ln 4 + n\ln u_n \prec 1$

وبالتالي لكل عدد طبيعي n حيث $2 \leq n$: $-\frac{\ln 4}{n} \prec \ln(u_n) \prec \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$.

5.ج. نستنتج أن $\lim u_n = 1$.

لدينا لكل عدد طبيعي n حيث $2 \leq n$: $-\frac{\ln 4}{n} \prec \ln(u_n) \prec \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$.

إذن : لكل عدد طبيعي n حيث $2 \leq n$: $e^{\left(-\frac{\ln 4}{n}\right)} \prec u_n \prec e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}\right)}$.

وحيث أن : $\lim e^{\left(-\frac{\ln 4}{n}\right)} = \lim e^{\left(\frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}\right)} = 1$

فإن : $\lim u_n = 1$.

التمرين الخامس :

1.نبين أن F فردية :

الدالة F معرفة على R^* (متماثلة بالنسبة للصفر)

ليكن x من R^*،

لدينا : $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع $u = -t$ إذن : $du = -dt$

من أجل $t = -x$ لدينا $u = x$ ومن أجل $t = -2x$ لدينا : $u = 2x$

وبالتالي :

$$F(-x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln\left(1+(-u)^2\right)}(-du)$$

$$= -\int_{x}^{2x} \frac{1}{\ln(1+u^2)} du$$

$$= -F(x)$$

ومنه : لكل x من D_F : $(-x) \in D_F$ و $F(-x) = -F(x)$.

وهذا يعني أن الدالة F فردية .

2.أ. نتحقق أن لكل x من $]0,+\infty[$: $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا :

wadiiifi@hotmail.com

$$F(x)=\int_x^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$
$$=\int_x^{1}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt+\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$
$$=\int_1^{2x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt-\int_1^{x}\frac{1}{\ln(1+t^2)}dt$$
$$=\varphi(2x)-\varphi(x)$$

ومنه

لكل x من $]0,+\infty[$: $F(x)=\varphi(2x)-\varphi(x)$.

2.ب. نبين أن F قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم نحسب $F'(x)$ من أجل $0\prec x$

الدالة $f:t\mapsto\dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن الدالة φ قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]0,+\infty[$: $\varphi'(x)=f(x)$.

وحيث أن الدالة $x\mapsto 2x$ قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ وتأخذ قيمها في $]0,+\infty[$

فإن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ و لكل x من $]0,+\infty[$ لدينا :

$$F'(x)=2f(2x)-f(x)$$
$$=2.\frac{1}{\ln(1+4x^2)}-\frac{1}{\ln(1+x^2)}$$
$$=\frac{2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2).\ln(1+x^2)}$$

2.ج. نستنتج منحى تغيرات F على المجال $]0,+\infty[$:

لدينا : $1+2x^2\succ 0$ و $1+4x^2\succ 0$

إذن : $\ln(1+x^2)\succ 0$ و $\ln(1+4x^2)\succ 0$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة العدد $2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)$

ولدينا : لكل x من $]0,+\infty[$

$$2\ln(1+x^2)-\ln(1+4x^2)\succ 0 \iff (1+x^2)^2\succ\ln(1+4x^2)$$
$$\iff x^2\succ 2$$
$$\iff x\succ\sqrt{2}$$

ومنه F تزايدية قطعا على $[\sqrt{2},+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]0,\sqrt{2}]$.

3.أ. نبين أن $(\forall x \succ 0)\ (\exists x \in]x,2x[) :\ F(x) = \dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

لدينا : φ متصلة على المجال المغلق $[x\ ,\ 2x]$ وقابلية للإشتقاق على المجال المفتوح $]x,2x[$

إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية يوجد **c** من $]x,2x[$ حيث : $\varphi(2x)-\varphi(x)=(2x-x)\varphi'(c)$

أي : $F(x)=\dfrac{x}{1+c^2}$.

ومنه $(\forall x \succ 0)\ (\exists x \in]x,2x[) :\ F(x) = \dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$

3.ب. نستنتج أن $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \prec F(x) \prec \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$.

يوجد **c** من $]x,2x[$ حيث : $F(x)=\dfrac{x}{1+c^2}$

ولدينا : $x \prec c \prec 2x \Rightarrow \dfrac{1}{\ln(1+x^2)} \prec \dfrac{1}{\ln(1+c^2)} \prec \dfrac{1}{\ln(1+4x^2)}$

$$\Rightarrow \dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \prec F(x) \prec \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$$

إذن : $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \prec F(x) \prec \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

3.ج. نحددالنهايات :

لدينا . $\dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \prec F(x) \prec \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x\mapsto 0^+}\frac{1}{4x}\,\frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)}$$

ولدينا $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)} = 1$ **(يمكنك وضع $t=4x^2$)**

إذن $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$

إذن : $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+} F(x) = +\infty$

wadiiifi@hotmail.com

. لدينا

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\ln(1+4x^2)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\ln x^2+\ln\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{\ln x}\cdot\frac{1}{2+\frac{\ln\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}}$$

$$=+\infty$$

وحيث أن : $F(x)\succ\frac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

فإن $\lim_{x\mapsto+\infty}F(x)=+\infty$

لدينا. $\frac{x}{\ln(1+x^2)}\succ F(x)\succ\frac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

إذن : $\frac{1}{\ln(1+x^2)}\succ\frac{F(x)}{x}\succ\frac{1}{\ln(1+4x^2)}$

وحيث أن $0=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\ln(1+4x^2)}$

فإن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{F(x)}{x}=0$

3.د.نتحقق أن $\sqrt{e-1}\succ F(\sqrt{e-1})$ و $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\succ\sqrt{\frac{e-1}{2}}$:

لدينا . $\frac{x}{\ln(1+x^2)}\succ F(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$.

إذن : $\frac{\sqrt{e-1}}{\ln\left(1+\sqrt{e-1}^2\right)}\succ F(\sqrt{e-1})$

وبالتالي : $\sqrt{e-1}\succ F(\sqrt{e-1})$

لدينا . $F(x)\succ\frac{x}{\ln(1+4x^2)}$ لكل x من $]0,+\infty[$.

إذن : $f\left(\sqrt{\frac{e-1}{2}}\right)\succ\frac{\sqrt{e-1}}{2}\frac{1}{\ln\left(1+4\sqrt{e-1}^2\right)}$

وبالتالي : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right)\succ\sqrt{\frac{e-1}{2}}$

استنتاج : نعتبر الدالة العددية H المعرفة بمايلي : $H(x)=F(x)-x$

الدالة H متصلة ، قابلة للإشتقاق وتناقصية قطعا على المجال $]0 , \sqrt{e-1}[$

إذن H تقابل من المجال $]0 , \sqrt{e-1}[$ نحو صورته بالدالة H الذي يحتوي على الصفر

ومنه يوجد سابق وحيد للصفر في المجال $]0 , \sqrt{e-1}[$.

أي أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0 , \sqrt{e-1}[$

ولدينا : $H\left(\sqrt{\frac{e-1}{2}}\right).H\left(\sqrt{e-1}\right)\prec 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطية ، المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $I = \left[\sqrt{\frac{e-1}{2}} , \sqrt{e-1}\right]$

$[\sqrt{e-1} , +\infty[$

ولدينا لكل x من

$$x \succ \sqrt{e-1} \Rightarrow \ln(1+x^2) \succ 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1+x^2)} \prec x$$

$$\Rightarrow F(x) \prec x$$

$$\Rightarrow H(x) \neq 0$$

وبالتالي لا يوجد حل للمعادلة خارج المجال $I = \left[\sqrt{\frac{e-1}{2}} , \sqrt{e-1}\right]$

ومنه المعادلة تقبل حلا وحيدا أكبر قطعا من الصفر.

مع متمنياتي لكم بالتوفيق

wadiiifi@hotmail.com