الدوال اللوغاريتمية

التمرين ١

في كل حالة من الحالات المقترحة عين مجموعة تعريف الدالة f

1) $f(x)=\ln(x^2-1)$ 2) $f(x)=\ln(x-1)^2$

3) $f(x)=\ln x+\ln(x+2)$ 4) $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x^2}\right)$

5) $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$ 6) $f(x)=\frac{1-x^2}{x}+x\ln x$

7) $f(x)=x+\ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right)$ 8) $f:x\mapsto \ln|x|$

9) $f(x)=\ln(2x-1)+\ln(x^2-4)$

10) $f:x\mapsto \ln(-2x+3)$ 11) $f:x\mapsto \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$

12) $f:x\mapsto \ln(x+1)-\ln(x-2)$

13) $f:x\mapsto \ln(x^2+2x-3)$

14) $f:x\mapsto \ln\sqrt{2-3x}$ 15) $f:x\mapsto \frac{\ln x}{x}$

16) $f:x\mapsto \frac{1-x}{\ln x}$ 17) $f:x\mapsto \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$

18) $f:x\mapsto \ln(\ln x)$ 19) $f:x\mapsto \sqrt{\ln x}$

20) $f:x\mapsto \frac{\ln\sqrt{x^2-1}}{x}$ 21) $f:x\mapsto \ln|x+1|-\ln|x|$

التمرين ٢

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=\ln(2x-3)$ 2) $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$

3) $\ln(x^2-1)=\ln(x+5)$ 4) $\ln|1-x|=\ln 3$

5) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$ 6) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-1$

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln(3x)<\ln(4x+8)$ 2) $\ln(x^2)<\ln(3x-2)$

3) $\ln(2x^2)>\ln(6-4x)$ 4) $\ln(x^2+x-2)>0$

5) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$

6) $\ln x+\ln(x+1)\le \ln(x^2-2x+2)$

التمرين ٣

حل في $\mathbb{R}^2$ النظمات التالية:

1) $\begin{cases}\ln(x+1)^4+\ln y=0\\ \ln x^2+\ln\frac{1}{y}=\ln x\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\frac{x}{y}+=-\ln 3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=60\\ \ln x+\ln y=\ln 1000\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x^2+2y=16\\ \ln\frac{x}{y}=-\ln 3\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2+y^2=169\\ \ln x+\ln y=\ln 60\end{cases}$ 6) $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ \ln x+\ln y=\ln 2\end{cases}$

التمرين ٤

احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\ln x$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3+\ln x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^2)}$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)\ln x$ 6) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x)\ln(-x)$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-(\ln x)^2)$ 8) $\lim\limits_{x\to0^+} x^2Ln^3x$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 10) $\lim\limits_{x\to1^+}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

11) $\lim\limits_{x\to-1^-}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 12) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(x^2+2x)$

13) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x^2+2x)$ 14) $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x^2+2x)$

15) $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x+\ln(1-x)$ 16) $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x+\ln(1-x)$

17) $\lim\limits_{x\to0}2\frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}$ 18) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}}$

19) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-1}Ln(\frac{x^2}{3})$ 20) $\lim\limits_{x\to0^+}\sin x.Lnx$

21) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(Lnx)^2}{x}$ (ضع $t=\sqrt{x}$)

22) $\lim\limits_{x\to0}\frac{Ln(1+\tan x)}{\tan x}$

Lagnzal

التمرين ٥

احسب المشتقة $f'(x)$ للدوال f المعطاة:

- $f(x)=x+\ln x$
- $f(x)=2x^2-\ln(x)$
- $f(x)=-x+\ln 2+\ln x$
- $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$
- $f(x)=(\ln x)^2+\ln x-2$
- $f(x)=x\ln x$
- $f(x)=\frac{1}{\ln x}$
- $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
- $f(x)=\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$
- $f(x)=\ln(-2x-1)$
- $f(x)=x(2-\ln x^2)$
- $f(x)=\ln(2x^2+x-6)$
- $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
- $f(x)=\frac{2x-1+\ln x}{x}$

التمرين ٦

I- نعتبر الدالة المعرفة بما يلي

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{Lnx}{(x-2)^2}.....x\succ 2\\ x+Ln(2-x).....x\prec 2\end{cases}$$

1- حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ثم أعط تأويلا

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم ادرس الفروع اللانهائية للدالة

II- نعتبر الآن الدالة المعرفة على $]2,+\infty[$ بما يلي

$$g(x)=x-2-2xLnx$$

1- أعط صيغة الدالة المشتقة $g'(x)$ ثم حدد إشارتها على $]2,+\infty[$

2- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x(x-2)^3}$ على $]2,+\infty[$

3- احسب $f'(x)$ على $]-\infty,2[$ ثم ضع جدول التغيرات على $IR-\{2\}$

4- أنشئ المنحنى C_f

التمرين ٧

التمرين ٨

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي

$$f(x)=x^2(\ln x-1)^2$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) احسب نهايات الدالة f عند محدات Df

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) حدد الفروع اللانهائية ثم مثل منحنى الدالة f

التمرين ٩

I. f و g دالتان معرفتان على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\ln(1+x)-x \text{ و } g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$$

1. ادرس تغيرات كل f و g على $[0;+\infty[$.

2. استنتج أنه من أجل كل $x\geq 0$: $x-\frac{x^2}{2}\leq\ln(1+x)\leq x$

II. نريد دراسة المتتالية (u_n) للأعداد الحقيقية المعرفة كما يلي: $u_1=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=u_n\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$

1. برهن بالترجع أن $u_n>0$ من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$

2. برهن بالترجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n\geq 1$:

$$\ln u_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$$

3. نضع $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+....+\frac{1}{2^n}$ و

$$T_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+....+\frac{1}{4^n}$$

باستعمال الجزء **I** ، بين أن: $S_n-\frac{1}{2}T_n\leq\ln u_n\leq S_n$

4. احسب S_n و T_n بدلالة n. استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

5. أ- بين أن المتتالية (u_n) تزايدية قطعا.

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة ، لتكن ℓ نهايتها.

جـ- نقبل النتيجة التالية: " إذا كانت متتاليتان (v_n) و (w_n) متقاربتان حيث $v_n\leq w_n$ من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\leq\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$ "

- بين إذن أن: $\frac{5}{6}\leq\ln\ell\leq 1$. استنتج تأطيرا لـ ℓ .

Lasnza