C: NS24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
كتابة الدولة المكلفة بالتعليم المدرسي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
-الدورة العادية 2008-
الموضوع

9	المعامل:	الرياضيات	المادة:
4س	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعب(ة):

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين الأول:(3,25 نقطة)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية و $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي و $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع:

$$E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}\right\} \text{ و } J=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix} \text{ و } I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

0,75 — 1) أ) بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$

0,5 — ب) بين أن الأسرة (I,J) أساس في الفضاء المتجهي $(E,+,.)$

2) نعتبر التطبيق :

$$f:\mathbb{C}^*\longrightarrow E^* \qquad a+ib\longrightarrow M(a,b)$$

حيث : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0,25 — أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0,5 — ب) بين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$

0,5 — 3) بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0,75 — 4) حل في E المعادلة : $J\times X^3=I$ (حيث $X^3=X\times X\times X$)

التمرين الثاني:(3,75 نقطة)

ليكن a عددا عقديا غير منعدم و $\bar{a}$ مرافق العدد a.

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\quad (G) \quad iz^2+(a+\bar{a}-i)z-\bar{a}-ia\bar{a}=0$

0,5 — 1) أ) تحقق أن مميز المعادلة (G) هو: $\Delta=(a-\bar{a}-i)^2$

0,5 — ب) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (G) .

0,5 — 2) بين أن a حل للمعادلة (G) إذا و فقط إذا كان $\operatorname{Re}(a)=\operatorname{Im}(a)$ (حيث $\operatorname{Re}(a)$ هو الجزء الحقيقي للعدد العقدي a و $\operatorname{Im}(a)$ هو جزءه التخيلي)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$ ،نفترض أن $Re(a) \neq Im(a)$
نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي a و $i\bar{a}$ و $1+ia$

1) نضع : $Z = \dfrac{(1+ia)-a}{(i\bar{a})-a}$

0,5 أ) تحقق أن : $\bar{Z} = \dfrac{(i-1)\bar{a}-i}{i\bar{a}-a}$

0,5 ب) بين أن النقط A و B و C مستقيمية إذا و فقط إذا كان $Im(a) = \dfrac{1}{2}$

2) نفترض في هذا السؤال أن $Im(a) \neq \dfrac{1}{2}$

نعتبر R_1 الدوران الذي مركزه A و زاويته $-\dfrac{\pi}{2}$ و R_2 الدوران الذي مركزه A و زاويته $\dfrac{\pi}{2}$

نضع : $R_1(B) = B'$ و $R_2(C) = C'$

لتكن النقطة E منتصف القطعة $[BC]$

0,5 أ) حدد b' و c' لحقي النقطتين B' و C' على التوالي .

0,75 ب)بين أن المستقيمين (AE) و $(B'C')$ متعامدان و أن $B'C' = 2AE$

التمرين الثالث :(3 نقط)

I- نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ المعادلة التالية : $35u - 96v = 1 \quad (E)$

0,25 1)تحقق أن الزوج $(11,4)$ حل خاص للمعادلة (E)

0,5 2)استنتج مجموعة حلول المعادلة (E)

II- نعتبر في المجموعة $\mathbb{N}$ المعادلة التالية: $x^{35} \equiv 2\,[97] \quad (F)$

1) ليكن x حلا للمعادلة (F)

0,5 أ) بين أن العدد 97 أولي و أن x و 97 أوليان فيما بينهما .

0,5 ب) بين أن : $x^{96} \equiv 1\,[97]$

0,5 ج) بين أن : $x \equiv 2^{11}\,[97]$

0,25 2) بين أنه إذا كان العدد الصحيح الطبيعي x يحقق $x \equiv 2^{11}\,[97]$ فإن x حل للمعادلة (F)

0,5 3) بين أن مجموعة حلول المعادلة (F) هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية التي تكتب على الشكل $11+97k$ حيث $k \in \mathbb{N}$

المـــادة :	الرياضيات
الشعـب(ة):	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)

التمرين الرابع:(10 نقط)

I – لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}_+$ بما يلي : $f(x)=2x-e^{-x^2}$
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,5 — 1) أ) احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

0,5 — ب) احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

0,5 — ج) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}_+$ و أن $0<\alpha<1$

0,5 — د) ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0,1]$

0,5 — 2) أنشئ المنحنى (C) .(نأخذ : $\alpha\approx 0,4$)

II – نعتبر الدالتين العدديتين φ و g للمتغير الحقيقي x المعرفتين على $\mathbb{R}_+$ بما يلي :

$$\begin{cases}\varphi(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\ ;\ x>0\\ \varphi(0)=1\end{cases} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2-\int_0^x e^{-t^2}dt$$

0,5 — 1) أ) بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)(\exists c\in]0,x[)\ :\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt=e^{-c^2}$

0,5 — ب) استنتج أن : $\int_0^1 e^{-t^2}dt<1$

0,5 — 2) أ) بين أن: $g(\alpha)=\int_0^\alpha f(t)dt$

0,5 — ب) بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ و أن: $(\forall x\in\mathbb{R}_+)\ ;\ g'(x)=f(x)$

0,5 — ج) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]\alpha,1[$

0,5 — 3) أ) بين أن الدالة φ متصلة على اليمين في الصفر.

0,5 — ب) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi(x)=e^{-x^2}+\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

0,75 — ج) بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن: $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\ ;\ \varphi'(x)=-\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x t^2e^{-t^2}dt$

0,5 — د) بين أن : $\varphi([0,1])\subset[0,1]$

0,5 — 4) أ) بين أنه لكل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}_+$ لدينا : $\int_0^x t^2e^{-t^2}dt\le\dfrac{x^3}{3}$

ب) بين أن : $\left(\forall x\in \left]0,1\right[\right)\ ;\ \left|\varphi'(x)\right|\le \dfrac{2}{3}$	0,5
ج) بين أن : $\left(\forall x\in \mathbb{R}_{+}^{*}\right)\ ;\ \ \varphi(x)=x \Leftrightarrow g(x)=0$	0,25
5) نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\ge 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\dfrac{2}{3}$ و $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ ;\ u_{n+1}=\varphi(u_n)$	
أ) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ ;\ 0\le u_n\le 1$	0,5
ب) بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right)\ ;\ \left|u_n-\beta\right|\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$	0,5
ج) استنتج أن المتتالية $\left(u_n\right)_{n\ge 0}$ متقاربة و حدد نهايتها.	0,5