I- عموميات:

1)- تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق u من $\mathbb{N}$ (أو $\mathbb{N}^*$) نحو $\mathbb{R}$.

و لكل n من $\mathbb{N}$ العدد $u(n)$ يسمى الحد العام للمتتالية u و يرمز له ب u_n ، كما يرمز للمتتالية u بالرمز $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو $(u_n)_{n\geq 0}$.

العدد u_0 يسمى الحد الأول و u_1 الحد الثاني . . . و بصفة عامة u_n هو الحد من الرتبة $n+1$.

2)- أمثلة:

$\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)_{n\geq 0}$ و $\left(3^n-2n\right)_{n\geq 0}$ متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$.

$\left(n\sin\frac{1}{n}\right)_{\geq 1}$ و $\left(\frac{2}{n\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}^*$.

و المتتالية العددية $\left(\frac{n^2+1}{\sqrt{n-2}}\right)_{n\geq 3}$ معرفة على $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq 3\}$.

- **تمرين01:**

أحسب الحدود الستة الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $u_n=\cos\frac{n\pi}{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

- **تمرين02:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة ب : $u_0=9$ و $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب الحدود التالية : u_1 و u_2 و u_3 و u_4 .

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

- **ملحوظة:**

يمكن تعريف متتالية عددية بإحدى الصيغتين :

الصيغة الصريحة: الحد العام u_n في هذه الحالة معبر عنه بدلالة n ، بمعنى أن $u_n=f(n)$ حيث f دالة عددية تحتوي مجموعة تعريفها على $\mathbb{N}$.

الصيغة الترجعية: الحد العام u_n معبر عنه بدلالة الحدود السابقة له u_{n-1} و u_{n-2} و . . ويجب على الأقل أن يكون الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معلوما .

- **تمرين03:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :

$u_0=10$ و $u_1=7$ و $u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب u_2 و u_3 و u_4 ، ثم تظنن الحد العام u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

ب- هل -2006 حد من حدود المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ ؟

3)- المتتاليات المكبورة و المتتاليات المصغورة:

- **تقديم:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n=\frac{3n-4\sqrt{n}+1}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:-1<u_n<3$.

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية ، m و M عددين حقيقيين بحيث $m<M$.

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد M إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\leq M$

و مصغورة بالعدد m إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}:m\leq u_n$.

و نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية محدودة إذا كانت مكبورة و مصغورة .

- **ملحوظة:** إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حدودها موجبة فإنها مصغورة بالعدد 0 أما إذا كانت حدودها سالبة فإنها مكبورة ب 0 .

- **خاصية01:**

تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ محدودة إذا وفقط إذا وجد α من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث :

$\forall n\in\mathbb{N}:|u_n|\leq\alpha$.

- **تمرين04:**

نعتبر المتتاليات الثلاث المعرفة بما يلي :

$a_n=\sqrt{n}\left(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\right)/n\geq 1$ و $b_n=n-\sqrt[3]{n^3-1}/n\geq 1$

و $c_n=\frac{2n^2-n+1}{n^2+1}/n\geq 0$.

بين أن (a_n) و (b_n) و (c_n) متتاليات محدودة .

- **تمرين05:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2}$.

أ- أحسب u_1 و u_2 و u_3 .

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ مكبورة بالعدد $\sqrt{3}$ و مصغورة بالعدد1

ثم إستنتج أنها محدودة .

4)- المتتاليات الرتيبة:

- **تعريف:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا إذا كان : $u_n < u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

و تناقصية قطعا إذا كان : $u_n > u_{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ونقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية رتيبة إذا كانت تزايدية أو تناقصية .

- **أمثلة:**

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) بحيث :

$a_n = n + \dfrac{1}{n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ و $b_n = n - 4^n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

بين أن (a_n) و (b_n) رتيبتين قطعا .

- **خاصية02:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حدودها موجبة قطعا (على التوالي سالبة قطعا) .

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$

(على التوالي : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$)

و تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

(على التوالي : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$) .

- **أمثلة:**

نعتبر المتتاليتين (a_n) و (b_n) بحيث : $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ و $b_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

بين أن (a_n) و (b_n) رتيبتين قطعا .

- **خاصية03:**

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية حيث : $u_n = f(n)$ و f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}_+$

إذا كانت f رتيبة قطعا على $\mathbb{R}_+$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون أيضا رتيبة قطعا و لها نفس رتابة الدالة f على $\mathbb{R}_+$.

- **مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب : $u_n = \dfrac{-2n+5}{n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

لدينا : $u_n = f(n)$ حيث $f(x) = \dfrac{-2x+5}{x+1}$ ، و بما أن f تناقصية قطعا على المجال $]-1, +\infty[$ و $\mathbb{R}_+ \subset]-1, +\infty[$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية قطعا .

II- المتتاليات الحسابية و المتتاليات الهندسية:

1)- المتتاليات الحسابية:

- **تعريف:**

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم r بحيث :

$u_{n+1} = u_n + r$ لكل n من $\mathbb{N}$.

العدد r في هذه الحالة يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

- **ملحوظة:**

رتابة متتالية حسابية $(u_n)_{n\geq 0}$ مرتبطة بإشارة أساسها r ، إذا كان $r > 0$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون تزايدية قطعا ، و إذا كان $r < 0$ فإن $(u_n)_{n\geq 0}$ تكون تناقصية قطعا .

- **مثال:**

لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n = -5n + 10$

لدينا : $u_{n+1} - u_n = -5$ إذن : $u_{n+1} = -5 + u_n$ ، و بالتالي $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = -5$.

- **تمرين06:**

بين أن حلول المعادلة $(E): \cos x + \sin x = 0$ الموجبة تكون حدود متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول .

- **خاصية04:** لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}: \frac{u_n+u_{n+2}}{2}=u_{n+1}$

أو $\forall n\in\mathbb{N}^*: \frac{u_{n-1}+u_{n+1}}{2}=u_n$.

- **خاصية05:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية أساسها r فإن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=u_0+n.r$

و بصفة عامة : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2: u_n=u_p+(n-p)r$.

- **تمرين07:**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=-1; u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\frac{u_n}{4}; \forall n\in\mathbb{N} \end{cases} \quad \text{و} \quad v_n=2^n u_n \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}.$$

أ- بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول .

ب- أحسب بدلالة n الحد العام u_n ، ثم إستنتج a_n بدلالة n .

- **خاصية06:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ مجموع n حدا الأولى حيث $n\geq 1$ فإن : $S_n=n.\frac{u_0+u_{n-1}}{2}$ ، و بصفة عامة :

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2 / p<n: u_p+u_{p+1}+...+u_n=\frac{(n-p+1).(u_p+u_n)}{2}$$

- **ملحوظة:** يمكن التعبير عن S_n بدلالة الحد الأول u_0 و الأساس r نحصل على :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*: \; S_n=nu_0+\frac{n(n-1)r}{2} .$$

- **تمرين08:**

أ- حدد قيمة كل عدد من العددين S و T حيث :

$S=6+10+14+...+1002$ و $T=5+16+27+...+2007$.

ت- أحسب بدلالة n المجموع : $X_n=1+6+11+...+(5n+1)$ ، ثم إستنتج قيمة العدد : $X=1+6+11+...+2006$.

ج- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها $r=-2$ و مجموع حدودها السبعة عشر الأولى هو $S_{17}=1513$ ، فأحسب الحد الأول u_1 و u_{17} .

- **تمرين09:**

نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين ب :

$$u_0=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}: \; u_{n+1}=\frac{u_n}{1+2u_n} \quad \text{و} \quad \forall n\in\mathbb{N}: \; v_n=1+\frac{1}{u_n} .$$

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية و حدد أساسها r و حدها الأول v_0 .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.

2)- المتتاليات الهندسية:

- **تعريف:** لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

نقول إن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم q بحيث : $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}=q\,u_n$ ، العدد q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

- **مثال:** لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $u_n=\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$.

بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

- **خاصية07:** لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية عددية .

تكون $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية لإذا وفقط إذا كان : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n u_{n+2}=u_{n+1}{}^2$

أو $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_{n-1}u_{n+1}=u_n{}^2$.

- **خاصية08:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها q فإن : $\forall n\in\mathbb{N}: u_n=u_0.q^n$

و بصفة عامة : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2: u_n=u_p.q^{n-p}$.

- **تمرين10:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين بما يلي :

$u_0=3$ و $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ u_{n+1}=1-\dfrac{u_n}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ v_n=3u_n-2$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **تمرين11:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين بما يلي :

$\begin{cases} u_0=-1;u_1=1 \\ u_{n+2}=u_{n+1}-\dfrac{u_n}{4};\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$ و $v_n=u_{n+1}-\dfrac{u_n}{2}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- بين أن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية و حدد أساسها q و حدها الأول .

ب- عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **خاصية09:**

إذا كانت $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q\neq 1$ و $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ مجموع n حدا الأولى حيث $n\geq 1$ فإن : $\forall n\in\mathbb{N}^*:S_n=u_0.\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

و بصفة عامة : $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2/\,p<n:u_p+u_{p+1}+...+u_n=u_p.\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$.

- **تمرين12:**

أ- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية بحيث $u_4=16$ و $u_9=512$ فحدد أساسها q

ثم أحسب S_6 مجموع حدودها الستة الأولى .

ب- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_1=7$ و أساسها $q=2$

فحل في $\mathbb{N}^*$ المعادلة : $S_n=1785$ ثم أحسب u_n .

ج- إذا علمت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{3}$ ، فحل في $\mathbb{N}^*$ النظمة :

$(1):\begin{cases} u_n=27 \\ S_n=3267\end{cases}$ ، ثم أحسب الحد الأول u_1 .

- **تمرين13:**

نعتبر المتتالية $(x_n)_{n\geq 0}$ بحيث : $\forall n\in\mathbb{N}:x_n=(-2)^n+3n+1$.

أحسب بدلالة n المجموع : $S=x_0+x_1+...+x_n$.

III- نهاية متتالية عددية:

نهاية متتالية عددية (u_n) عندما تؤول n إلى $+\infty$ إذا وجدت يرمز لها بالرمز $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

- **تعريف:**

إذا كانت (u_n) تقبل نهاية منتهية نقول إنها متقاربة ، و متباعدة إذا كانت لا تقبل نهاية أو كانت نهايتها لا منتهية .

- **ملحوظة:**

لدينا :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-L)=0$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -u_n=+\infty$

1)- نهايات متتاليات مرجعية:

في الجدول التالي نلخص نهايات بعض المتتاليات المرجعية .

(u_n)	$n^\alpha/\alpha\in\mathbb{Q}_+^*$	$q^n/q>1$	$n^\alpha/\alpha\in\mathbb{Q}_-^*$	$q^n/-1<q<1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$+\infty$	$+\infty$	0	0

- **ملحوظة:**

إذا كان $q\leq -1$ فإن المتتالية (q^n) لا تقبل نهاية ، إذن فهي متباعدة .

- **تمرين14:**

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليات (a_n) و (b_n) و (u_n) و (v_n) المعرفة ب :

$a_n=\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$ و $b_n=\dfrac{-3}{(1+10^{-11})}$ و $u_n=\dfrac{1+4^n}{1-4^n}$ و $v_n=\dfrac{\pi^n-3^n}{\pi^n+3^n}$

- **خاصية10:**

إذا كانت (u_n) متتالية عددية حدها العام $u_n=f(n)$ حيث f دالة عددية معرفة على المجال $[k,+\infty[$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=L$.

- **ملحوظة:**

النتيجة السابقة صحيحة بالنسبة لنهاية L منتهية أو غير منتهية .

- **أمثلة:**

حدد نهاية كل متتالية من المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و$(v_n)_{n\geq 3}$ المعرفتين ب :

$u_n = n-\sqrt[3]{n^3+1}$ و $v_n = \dfrac{4-n^2}{\sqrt{n-2}}$.

2)- مصاديق تقارب متتالية عددية:

- **خاصية11:** لتكن (u_n) متتالية عددية .

إذا وجدت متتالية موجبة (v_n) و L من $\mathbb{R}$ و k من $\mathbb{N}$ بحيث : $\forall n\geq k: |u_n - L|\leq v_n$

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.

- **مثال:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي حدها العام : $u_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+...+\dfrac{1}{2^n}$

بما أن u_n هي مجموع $(n+1)$ حدا الأولى من متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{1}{2}$ ،

فإن : $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\dfrac{1}{2^n}$

إذن : $|u_n - 2| = \dfrac{1}{2^n}$ ، و بما أن : $\lim \dfrac{1}{2^n} = 0$ ، فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

- **تمرين15:** حدد النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-3)^n + 2.\cos n}{4^n}$.

- **خاصية12:** لتكن (u_n) متتالية عددية .

إذا وجدت متتاليتين عدديتين (v_n) و(w_n) و k من $\mathbb{N}$ بحيث :

$\forall n\geq k: w_n \leq u_n \leq v_n$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- **تمرين16:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين ب :

$u_n = \dfrac{2n^2-3.\sin n}{n^2+1}$ و $v_n = \dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+...+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}: \dfrac{2n^2-3}{n^2+1}\leq u_n \leq \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: \dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leq v_n \leq \dfrac{n}{n+1}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- **تمرين17:** نعتبر المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتين ب :

$u_n = \dfrac{3^n - 5^n}{1+2^n}$ و $v_n = n\left(\sqrt{n}-2\right)\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*: u_n \leq -\dfrac{1}{5}.\left(\dfrac{5}{2}\right)^n$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ب- بين أن : $\forall n\geq k: v_n > \dfrac{\sqrt{n}}{2}$ حيث k عدد صحيح طبيعي ينبغي تحديده

ثم إستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

3)- الترتيب و نهايات المتتاليات:

- **خاصية13:**

إذا كانت (u_n) و(v_n) متتاليتين متقاربتين بحيث : $\forall n\geq k: u_n \leq v_n$ (حيث $k\in\mathbb{N}$)

فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

- **إستنتاج:**

إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة و حدودها موجبة (أو موجبة قطعا) فنهايتها تكون موجبة .

و إذا كانت (u_n) متتالية متقاربة و حدودها سالبة (أو سالبة قطعا) فنهايتها تكون سالبة .

4)- تقارب المتتاليات الرتيبة:

- **خاصية14:**

إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية و مكبورة بعدد β فهي متقاربة و نهايتها L تحقق $L\leq\beta$.

وإذا كانت (u_n) متتالية تناقصية و مصغورة بعدد α فهي متقاربة و نهايتها L تحقق $L\geq\alpha$.

- **إستنتاج:**

إذا كانت (u_n) متتالية تزايدية و حدودها سالبة فهي متقاربة و نهايتها تكون أيضا سالبة .

و إذا كانت (u_n) متتالية تناقصية و حدودها موجبة فهي متقاربة و نهايتها موجبة .

- **تمرين18:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=1$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=1+\frac{u_n}{2}$.

أ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:1\leq u_n<2$ ، ثم إستنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية قطعا .

ب- أثبت أن $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

IV- دراسة المتتاليات الترجعية $u_{n+1}=f(u_n)$:

- **خاصية15:**

إذا كانت f دالة معرفة على مجال I و (u_n) متتالية حدودها عناصر من I بحيث :

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$ و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=b$.

- **مبرهنة:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ بحيث $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f دالة متصلة على مجال I و $u_0\in I$

إذا كانت $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة فإن نهايتها L هي حل المعادلة $f(x)=x$ حيث $x\in I$.

- **تمرين19:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2}$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

أ- بين أن الدالة f متصلة على المجال $I=]0,1[$ و أن : $f(I)\subseteq I$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

- **تمرين20:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_0=-\frac{1}{2}$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=\frac{u_n}{\sqrt{2+u_n}}$

و لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+2}}$.

أ- بين أن f متصلة على المجال $I=]-1,0[$ و أن : $f(I)\subseteq I$.

ب- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in I$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ رتيبة قطعا ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

- **تمرين21:**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي :

$u_0=-1$ و $\forall n\in\mathbb{N}:u_{n+1}=u_n^2+3u_n+\frac{1}{4}$.

و لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{4}$

أ- بين أن : $f(I)\subseteq I$ حيث $I=\left[-2,-\frac{1}{2}\right]$ ، و أن : $\forall n\in\mathbb{N}:u_n\in I$.

ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية ، ثم إستنتج أنها متقاربة و حدد نهايتها .

abouzakariya@yahoo.fr