TAIBA(1SM) **ENSEMBLES et APPLICATIONS** M.Jaber

EXO1 : Soient les ensembles : A={n∈ $\mathbb{Z}/\frac{15}{n+3} \in \mathbb{Z}$} et B={k∈ $IN/\sqrt{12-n} \in IN$},déterminer en extension : A, B, A∩B, A∪B,A∩ $\bar{B}$ et AxB

EXO2 : Donner dans IR le complémentaire de : A=IR*, B=IR$^+$, C=$]-\infty,2]$, D=[-5,7[et E=IR$^-$∪]3,8]

EXO3 : Soient E={$\frac{\pi}{2}+k\pi/k \in \mathbb{Z}$} et F={$\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{6}/k \in \mathbb{Z}$}
Montrer que $E \subset F$, a-t-on E=F ?

EXO4: Soient E={a,b} et F={0,1,2}, déterminer $\mathcal{P}(ExF)$

EXO5 : Soient E et F tels que E∪F ={a,b ,c ,d,e,f} et E∩F={b,d} et E\F={c}

EXO6 : Soient A, B et C des parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :
1) A\B=A∩ $\bar{B}$ 2) (A\B)∩(B\C)=(A∩B)\C
3) (A\B)\C=A\(B∪C) 4) A△B=$\bar{A}$ △ $\bar{B}$

EXO7 : Soient A, B et C des parties d'un ensemble non vide E. Montrer les équivalences :
1) A⊂B⇔ $\bar{B} \subset \bar{A}$ 2) $\bar{A} \subset B \Leftrightarrow A\cup B = E$
3) $A \cup B = B \cap C \Leftrightarrow A \subset B \subset C$

EXO8 : Soient A et B de $\mathcal{P}(E)$, montrer que $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$

EXO9 : Soient A et B de $\mathcal{P}(E)\backslash\{\emptyset\}$, résoudre dans $\mathcal{P}(E)$
Le système :$\begin{cases} X\backslash A=\emptyset \\ X\backslash B=\emptyset \end{cases}$

EXO10 :1) Soient A, X et Y trois parties de E .
1)montrer que $X\cap A = Y \cup A \Leftrightarrow Y \subset A \subset X$
2) Soient A et B de $\mathcal{P}(E)$, résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation : $X\cap A = X\cup B$

EXO11 : Soient $E=\{(x,y)\in IR: x^2+\frac{1}{y^2}$ =2} et
$F=\{(x,y)\in IR: x \quad +\frac{1}{y}$ =2 et x=y}
Montrer que $F \subset E$, a-ton $E=F$?

EXO12 : Soit n de IN et E un ensemble contenant n éléments et soit p le nombre de parties de E
1)Déterminer p dans les cas : n=0, n=1 puis n=2.
2)Montrer en général que p=2^n

EXO13 : Soit l'application $f: IN^2 \to IN$
$(x,y) \mapsto x+y+1$
1)Déterminer les antécédents de : 1, 2 et 0
2)f est-elle surjective ?injective ?

EXO14: Soit l'application $f: IR \to IR$ et $f(x)=\frac{2x}{1+|x|}$
1)Résoudre dans IR l'équation :$f(x)=-3$
2) f est –elle surjective ?
3) Montrer que f est injective

EX015 : Soit l'application $f: IR-\{1\} \to IR$
$x \mapsto \frac{2x}{1-x}$
1) Montrer que f est injective
2) f est-elle bijective ?
3) Déterminer l'ensemble E pour que f soit une bijection de IR-{1} vers E puis donner f^{-1}

EXO16 : Soit l'application $f: (]0,+\infty[)^2 \to (]0,+\infty[)^2$
$(x,y) \mapsto (xy, \frac{x}{y})$
Montrer que f est bijective et déterminer sa réciproque

EX017 : Soit l'application $f: [-1,1] \to [1,2]$
$x \mapsto 2-\sqrt{1-x^2}$
1) Etudier la parité de f.
2) f est-elle injective ?
3) Montrer que f est surjective.
4) Soit g la restriction de f à [0,1],montrer que g est bijective de [0,1] sur [1,2] et donner g^{-1}

EXO18 : Le plan (P) est munit d'un repère$(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on considère f l'application de (P) vers IR telle que pour tout M(x,y) on a f(M)=2x-y+ 1
1) Déterminer les images de O, A(1,0) et de B(-1,1)
2) Déterminer $f^{-1}(1)$
3) F est –elle injective ?
4) Montrer que f est surjective

EXO19 : Soit f l'application de IR vers IR et f(x)=$\frac{2}{x^2-4x+5}$
1)Mettre f(x) sous forme $\frac{2}{(x+a)^2+1}$
2)Montrer que f(IR)=]0,2]
3)Montrer que $\forall x \in IR$: f(4-x)=f(x),f est-elle injective ?
4) Soit g la restriction de f à E= [2,+∞[, montrer que g est bijective de E vers]0,2] et déterminer g^{-1}

EXO20 : Soient les applications $f: E \to F$ et $g: F \to G$
Montrer que si gof est injective alors f est injective.

EXO21 : Soit f une application de E vers F.
1)Montrer que pour toutes parties A et B de E on a :
a) A⊂B ⇒f(A)⊂f(B) b) f(A∪B)=f(A)∪f(B) c) A⊂ $f^{-1}(f(A))$
d) f(A∩B)⊂f(A)∩f(B)
et qu'on a égalité en c) et d) si f est injective
2) Montrer que pour toutes parties A et B de F on a :
a) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ b) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$