الإمتحان التجريبي الموحد للبكالوريا
دورة : 2016-2017
-الموضوع-

المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني.
المجمع التربوي علال عواد – سلا

المادة	الرياضيات	مدة الانجاز	4س
الشعبة و المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ)و(ب)	المعامل	9

- ❖ مدة انجاز الموضوع هي اربع ساعات .
- ❖ يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- ❖ يمكن انجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- ✓ التمرين الأول يتعلق بالحسابيات ....(2,5 ن)
- ✓ التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية ....(3,5 ن)
- ✓ التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية...................... ..(4 ن)
- ✓ التمرين الرابع يتعلق بالتحليل ....(8 ن)
- ✓ التمرين الخامس يتعلق بالتحليل............................(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الاول: (2,5 ن)

نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة : $(1) : \ x^2+y^2+xy-13x=0$

نضع $x\wedge y=d$ و $x=ad$ و $y=bd$

1- أ - بين أن : $a\wedge(a^2+ab+b^2)=1$. — 0,5

ب – استنتج أن : a/d — 0,5

2- نضع : $d=ac$ حيث $c\in\mathbb{N}^*$

أ- بين أن : $c(a^2+ab+b^2)=13$ — 0,5

ب- استنتج أن : $c=1$ — 0,25

3- حل المعادلة (1) — 0,75

التمرين الثاني: (3,5 ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E_n):\ z^n=(iz+2i)^n \ , \ (n\in\mathbb{N}^*)$

1- أ – حدد الشكل المثلثي للعددين z_1 و z_2 حلي المعادلة (E_2) حيث $(\text{Im}(z_1)>0)$ — 0,5

ب - لكل p من $\mathbb{N}$ نضع : $u_p=z_1^p+z_2^p$ ، بين أن : $u_p=2\left(\sqrt{2}\right)^p\cos(\frac{3p\pi}{4})$ — 0,5

ج - استنتج قيم p بحيث يكون $u_p=\left(\sqrt{2}\right)^{p+1}$ — 0,5

2- نعتبر في المستوى العقدي المنسوب الى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقطتين $A(-2)$ و $M(z)$ حيث $(z\in\mathbb{C})$.

أ - بين أنه اذا كان z حلا للمعادلة (E_n) فإن $OM=AM$. — 0,25

ب – استنتج أن جميع حلول المعادلة (E_n) تكتب على الشكل $-1+\lambda i \quad (\lambda\in\mathbb{R})$ — 0,25

3- أ – حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E_n). — 0,75

ب – بين أن حلول المعادلة تكتب على شكل — 0,75

$$z_k=-1+i\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{n}) \qquad k\in\{0;1;2;......;(n-1)\}$$

التمرين الثالث: (4 ن)

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ نضع $\text{M}(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -5b & a+2b\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة $E=\left\{M(a,b)/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ و $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix}0&1\\-5&2\end{pmatrix}$

1- أ- بين ان $(E,+)$ زمرة تبادلية . — 0,25

ب – بين أن $J^2=2J-5I$ و استنتج أن E جزء مستقر من $(\text{M}_2(\mathbb{R}),\times)$ — 0,5

ج – بين ان $(E,+,\times)$ جسم تبادلي . — 0,5

2- أ- بين أن لكل α من $\mathbb{R}$ و لكل $M(a,b)$ من E لدينا $\alpha\cdot M\in E$ — 0,25

ب - بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي على $\mathbb{R}$ — 0,25

ج – حدد أساسا للفضاء المتجهي E و استنتج $\dim E$ — 0,25

-3 ليكن $(\mathbb{C},+,.)$ فضاء متجهي بعده 2

أ- بين أن $\{1,1+2i\}$ اساس للفضاء المتجهي $\mathbb{C}$. — 0,25

ب- استنتج أن كل عدد عقدي يكتب بكيفية وحيدة على شكل $a+b(1+2i)$ — 0,25

ت- ليكن $z=a+b(1+2i)$ نعتبر التطبيق $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & E \\ z & \to & \varphi(z)=M(a,b) \end{array}$

بين أن تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},+)$ نحو $(E,+)$. — 0,5

ث- بين أن لكل z و z' من $\mathbb{C}$: $\varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')$ — 0,25

-4 أ - بين أن : $\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-5\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$ — 0,25

ب - بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$: — 0,5

$$\left[\varphi(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\right]^n=\begin{pmatrix} \cos(\frac{n\pi}{3})-\frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{3}) & \frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{3}) \\ \frac{-5}{2}\sin(\frac{n\pi}{3}) & \cos(\frac{n\pi}{3})+\frac{1}{2}\sin(\frac{n\pi}{3}) \end{pmatrix}$$

التمرين الرابع: (8 ن)

الجزء الأول

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f_n(x)=\frac{e^{nx}}{x^2}-1$.

-1 ادرس تغيرات الدالة f_n على $\mathbb{R}^*$. — 0,5

-2 بين ان المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]-\infty,0[$. — 0,25

-3 ادرس اشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على المجال $]-\infty,0[$. — 0,25

-4 بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq1}$ تزايدية و استنتج انها متقاربة . — 0,5

-5 حدد $\lim_n \alpha_n$. — 0,25

-6 نضع : $u_n=\sum_{k=1}^{n}(\frac{\alpha_k^2}{k^2})$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أ- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$. — 0,25

ب- بين أن : $\forall n\geq 2:\quad u_n\leq 2\alpha_1^2$ — 0,25

ت- هل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة ؟ — 0,25

(بالنسبة للسؤال ب لاحظ ان : $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$ و $\forall k\geq 2;\quad \frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$)

الجزء الثاني

نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :
$$\begin{cases} F(x) = x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t^2}dt \ ; \ x \neq 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1- أ- بين أن: $\forall x > 0: \quad \frac{e^x}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^{2x}}{2}$. 0,25

ب- بين أن : $\forall x < 0: \quad \frac{e^{2x}}{2} \leq F(x) \leq \frac{e^x}{2}$ 0,25

2- بين أن F متصلة في الصفر . 0,25

3- ادرس الفرعين اللانهائيين لمنحنى الدالة F بجوار $+\infty$ و بجوار $-\infty$. 0,5

4- أ – بين أن : $\forall x > 0: \quad e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt < e^{2x}\ln 2$. 0, 5

ب – بين أن : $\forall x < 0: \quad e^{2x} \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt < e^{x}\ln 2$. 0, 5

ج – أستنتج أن : $\lim_{x\to 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$. 0,25

5- أ – بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \ \ F(x) = e^x - \frac{e^{2x}}{2} + x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$. 0,5

ب – استنتج أن : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \ \ F(x) - \frac{1}{2} = x\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt - \frac{(e^x-1)^2}{2}$. 0,25

ج – استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر . 0, 5

6- أ - بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و أن : $\forall x \in \mathbb{R}^*; \ \ F'(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ 0,5

ب – أعط جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}^*$. (علل جوابك) . 0,5

7- أنشئ منحنى الدالة F في معلم متعامد ممنظم . 0,75

التمرين الخامس: (2 ن)

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي : $u_n = \dfrac{\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}}{n}$

1- تحقق أن : $\forall n \geq 1; \quad \ln(u_n) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\ln(n+k) - \ln(n))\right)$ 0,75

2- احسب $\int_0^1 \ln(1+x)dx$. 0,75

3- استنتج $\lim_n u_n$. 0,5