I- العبارة:

• **تقديم:**

نعتبر النصوص التالية :

p : " $\frac{2}{3}$ عدد عشري " و q : " العدد 544 67 يقبل القسمة على 4 "

r : " جميع الأعداد الأولية أعداد فردية " و s : " $\sqrt{2}$ عدد لاجذري " .

- النص p يحمل معنى خاطىء لأن $\frac{2}{3}$ عدد جذري لا عشري ، و النص r يحمل أيضا معنى خاطىء لأن 2 عدد أولي و لكنه ليس فرديا .
- النصين q و s يحملان معنى صحيحا لأن العدد 544 67 يقبل بالفعل القسمة على 4 و $\sqrt{2}$ ليس عددا جذريا : $\sqrt{2}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

نسمي p و r عبارتين خاطئتين و q و s عبارتين صحيحتين .

• **تعريف:**

نسمي عبارة كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا أو خاطئا .

• **ملحوظة:**

إذا كانت p عبارة صحيحة نقول إن قيمة حقيقتها هي 1 أو V ، أما إذا كانت خاطئة فإننا نقول إن قيمة حقيقتها هي 0 أو F .

• **أمثلة:**

لدينا : $517=11\times 47$ ، إذن $D_{517}=\{1,11,47,517\}$

و بالتالي فالنص " 517 عدد أولي " عبارة خاطئة ، في حين النص " 517 ليس عددا أوليا " عبارة صحيحة .

• **تمرين01:**

حدد قيمة حقيقية كل عبارة من العبارات التالية :

p : " $2-\sqrt{5}\succ\sqrt{2}-\sqrt{3}$ "

و q : " جداء عددين صحيحين طبيعيين فرديين عدد فردي "

و r : " للمعادلة $(E):x^2-y^2=12$ حل وحيد في المجموعة $\mathbb{N}^2$ " .

II- العمليات على العبارات:

1)- نفي عبارة:

• **تعريف:**

نفي عبارة p هي العبارة التي تكون خاطئة إذا كانت p صحيحة و صحيحة إذا كانت p خاطئة ، و يرمز لها بالرمز $non(p)$ أو $\rceil p$.

نعبر عن هذا في جدول يسمى جدول حقيقة $\rceil p$ كالتالي :

p	1	0
$\rceil p$	0	1

• **أمثلة:**

نفي العبارة الخاطئة p : " $\frac{2}{3}$ عدد عشري " هي العبارة الصحيحة $\rceil p$: " $\frac{2}{3}$ عدد لا عشري "

و نفي العبارة الصحيحة q: " $\sqrt{3}$ عدد لا جذري " هي العبارة الخاطئة

$\rceil q$: " $\sqrt{3}$ عدد جذري " أو باختصار $\rceil q$: " $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ " .

2)- عطف عبارتين:

• **تعريف:**

عطف عبارتين p و q هي العبارة التي تكون صحيحة فقط إذا كانت p و q صحيحتين معا

و يرمز لها بالرمز p و̅ q ، وجدول حقيقتها كالآتي :

		جدول حقيقة العطف	جدول حقيقة الفصل
p	q	p و̅ q	p أو q
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

• **أمثلة:**

$(2\neq -1$ و̅ $1-\sqrt{2}\prec\sqrt{2}-\sqrt{3})$ عبارة صحيحة لأنها عطف عبارتين صحيحتين .

و $(2=-1$ و̅ $1-\sqrt{2}\prec\sqrt{2}-\sqrt{3})$ عبارة خاطئة لأنها عطف عبارة خاطئة و عبارة صحيحة.

3)- فصل عبارتين:

• **تعريف:**

فصل عبارتين p و q هي العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p و q خاطئتين معا

و يرمز لها بالرمز p أو q ، و جدول حقيقتها أعلاه .

• **أمثلة:**

$(2=-1$ أو $1-\sqrt{2}\geq\sqrt{2}-\sqrt{3})$ عبارة خاطئة لأنها فصل عبارتين خاطئتين .

$(2\neq -1$ أو $1-\sqrt{2}\geq\sqrt{2}-\sqrt{3})$ عبارة صحيحة لأنها فصل عبارة صحيحة و عبارة خاطئة .

- **ملحوظة:**

عطف عبارة و نفيها عبارة خاطئة ، في حين فصل عبارة و نفيها عبارة صحيحة .

4)- إستلزام عبارتين:

- **تعريف:**

إستلزام عبارتين p و q هي العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة و يرمز لها بالرمز $p \Rightarrow q$ و تقرأ p تستلزم q .

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
1	1	1	
1	0	0	
0	1	1	
0	0	1	

- **ملحوظة:**

لاحظ أنه لما تكون العبارة p خاطئة ، فالعبارة $p \Rightarrow q$ تكون صحيحة مهما تكن قيمة حقيقة العبارة q .

في حين لما تكون العبارة p صحيحة تكون للإستلزام $p \Rightarrow q$ نفس قيمة العبارة q .

- **تمرين02:**

أتمم ملأ الجدول السابق ، ثم قارن الإستلزامين $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$.
ماذا تستنتج ؟

- **أمثلة:**

حدد قيمة حقيقة كل إستلزام من الإستلزامات التالية معللا جوابك :

$\sqrt{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \neq -1$ و $\sqrt{3} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow 2 = -3$ و $\sqrt{3} \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \Rightarrow 2 \neq -3$ و $\sqrt{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 = -1$.

5)- تكافؤ عبارتين:

- **تعريف:**

نقول إن عبارتين p و q متكافئتان و نكتب $p \Leftrightarrow q$ إذا كان لهما نفس قيم الحقيقة أي إذا كانتا خاطئتين أو صحيحتين معا .

- **أمثلة:**

$2 \prec -1$ و $-7+5=0$ عبارتان خاطئتان معا ، إذن : $2 \prec -1 \Leftrightarrow -7+5=0$.

$1-\sqrt{2} \prec \sqrt{2}-\sqrt{3}$ و $4\sqrt{3}-7 \prec 0$ عبارتان صحيحتان معا ،
إذن : $1-\sqrt{2} \prec \sqrt{2}-\sqrt{3} \Leftrightarrow 4\sqrt{3}-7 \prec 0$.

- **ملحوظة:**

من خلال الجدول التالي :

p	$\urcorner p$	$\urcorner(\urcorner p)$
1	0	1
0	1	0

نلاحظ أن : $\urcorner(\urcorner p) \Leftrightarrow p$ ، يسمى هذا التكافؤ قانونا منطقيا .

- **تمرين03:**

أنشىء جدولا تحدد فيه قيم حقيقة العبارتين : $p \Rightarrow q$ و $\urcorner p$ أو q . ماذا تستنتج ؟

- **خلاصة:**

النفي $\urcorner$ و العطف $\bar{\text{و}}$ و الفصل أو و الإستلزام $\Rightarrow$ و التكافؤ $\Leftrightarrow$ تسمى روابط منطقية لأنها تربط بين العبارات .

III- القوانين المنطقية:

1)- تعريف:

نسمي قانونا منطقيا كل عبارة صحيحة مكونة من عبارة أو عدة عبارات و من الروابط المنطقية السابقة .

- **أمثلة:**

p $\bar{\text{و}}$ $\urcorner p$ عبارة خاطئة ، إذن فهي ليست قانونا منطقيا .

في حين العبارات التالية : p أو $\urcorner p$ و $\urcorner(\urcorner p) \Leftrightarrow p$ و ($p \Rightarrow q \Leftrightarrow$ $\urcorner p$ أو q)
كلها قوانين منطقية ، لأنها عبارات صحيحة .

2)- قوانين موركان:

- **تمرين04:**

1. أنشىء جدولا تحدد فيه قيم حقيقة العبارتين: $\urcorner$ (p $\bar{\text{و}}$ q) و ($\urcorner p$ أو $\urcorner q$) ، ثم قارنهما .
2. إستنتج مما سبق عبارة تكافىء العبارة : $\urcorner$ (p أو q) .

- **خاصية01: (قانونا موركان)**

لدينا : $\urcorner$ (p $\bar{\text{و}}$ q) $\Leftrightarrow$ ($\urcorner p$ أو $\urcorner q$) و $\urcorner$ (p أو q) $\Leftrightarrow$ ($\urcorner p$ $\bar{\text{و}}$ $\urcorner q$) .

3)- نفي إستلزام عبارتين:

- **خاصية02:**

لدينا : $\urcorner(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow$ (p $\bar{\text{و}}$ $\urcorner q$) .

• **برهان:**

لدينا : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q$ أو $\rceil p)$

إذن : $\rceil(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \rceil(q$ أو $\rceil p) \Leftrightarrow (\rceil q$ و $\rceil(\rceil p))$

و بالتالي فإن : $\rceil(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q$ و $p)$.

4)- الإستلزام المضاد للعكس:

• **تعريف:**

الإستلزام المضاد للعكس للإستلزام $p \Rightarrow q$ هو الإستلزام $\rceil q \Rightarrow \rceil p$.

• **خاصية03:**

لدينا : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$

• **برهان:**

لدينا : $(\rceil q \Rightarrow \rceil p) \Leftrightarrow (\rceil p$ أو $\rceil(\rceil q)) \Leftrightarrow (q$ أو $\rceil p)$

و بما أن : $(q$ أو $\rceil p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$ فإن : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p)$.

IV- الدوال العبارية و المكممات:

1)- الدوال العبارية:

• **تقديم:**

نعتبر النصوص التالية :

" $n^2-4=0$ حيث $n \in \mathbb{Z}$ " و " $-x^2+x+6 \ge 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$ "

" $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \ge 2$ حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^{*2}$ " .

نلاحظ أنه كلما أخذت n و x و (x,y) قيما على التوالي في $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^{*2}$ نحصل على عبارة تكون إما صحيحة أو خاطئة ، هذه النصوص تسمى دوالا عبارية .

• **تعريف:**

الدالة العبارية هي كل نص رياضي تتوقف صحة معناه على متغير (أو عدة متغيرات) و يرمز لها بالرمز $P(x)$ حيث x يتغير على مجموعة غير فارغة E .

• **ملحوظة:**

لتكن $P(x)$ دالة عبارية على مجموعة E .

نرمز بالرمز A إلى مجموعة عناصر E التي تحقق $P(x)$ ، نكتب $A=\{x \in E / P(x)\}$

و بالرمز $\overline{A}$ إلى مجموعة عناصر E التي لا تحقق $P(x)$ أي التي تحقق $\rceil P(x)$.

نكتب $\overline{A}=\{x \in E / \rceil P(x)\}$.

(لاحظ أن : $\overline{A} \cap A = \varnothing$ و $\overline{A} \cup A = E$)

• **مثال:**

على المجموعة $\mathbb{R}$ نعتبر الدالة العبارية : $-x^2+x+6 \ge 0$

لدينا : $A=\{x \in \mathbb{R} / -x^2+x+6 \ge 0\}$ و $\overline{A}=\{x \in \mathbb{R} / -x^2+x+6 < 0\}$

إذن : $A=[-2,3]$ و $\overline{A}=]-\infty,-2[\cup]3,+\infty[$.

2)- المكممات:

لتكن $P(x)$ دالة عبارية على مجموعة E و $A=\{x \in E / P(x)\}$.

• إذا كان $A=E$ ، هذا يعني أن جميع عناصر E تحقق $P(x)$ نكتب :

$$\forall x \in E : P(x)$$

الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني و يقرأ مهما يكن أو لكل أو أيا كان .

• إذا كان $A \ne \varnothing$ ، هذا يعني أنه يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $P(x)$ نكتب

$$\exists x \in E / P(x)$$

الرمز $\exists$ يسمى المكمم الوجودي و يقرأ يوجد على الأقل .

وبصفة خاصة إذ كانت A أحادية أي أن $A=\{x\}$ ، هذا يعني أنه يوجد عنصر وحيد x من E يحقق $P(x)$ ، نكتب : $\exists ! x \in E / P(x)$.

يقرأ الرمز $\exists !$ يوجد عنصر وحيد و يسمى أيضا المكمم الوجودي و يعبر عن الوحدانية .

3)- نفي المكممات:

لتكن $P(x)$ دالة عبارية على مجموعة E .

لدينا : $\rceil(\forall x \in E : P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in E / \rceil P(x)$ ، إذن : $\rceil\forall \equiv \exists$

و من جهة أخرى : $\rceil(\exists x \in E / P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in E : \rceil P(x)$ ، إذن : $\rceil\exists \equiv \forall$.

• **تمرين05:**

أكتب نفي كل عبارة من العبارات التالية ، ثم حدد قيمة حقيقتها معللا جوابك :

p : " $\forall n \in \mathbb{N}$: (n يقبل القسمة على 2) أو (n يقبل القسمة على 3) "

q : " $\exists x \in \mathbb{R}^* / (x^2+\frac{1}{x}<0)$ و $(x-\frac{1}{x^2}>0)$ "

r : " $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2=y^2 \Rightarrow x=y$ " .

4)- عبارات تحتوي على أكثر من مكمم:

نعتبر العبارتين :

p : " $\forall x \in \mathbb{R} \ \ \exists k \in \mathbb{Z} \ / \ k \leq x \prec k+1$ "

و q : " $\exists k \in \mathbb{Z} \ / \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \ k \leq x \prec k+1$ "

p عبارة صحيحة لأن (أي عدد حقيقي x يمكن حصره بعددين نسبيين متتابعين)

في حين q عبارة خاطئة لأن ($\mathbb{R}$ مجموعة غير محدودة) .

و بالتالي : إذا غيرنا ترتيب المكممات في عبارة تحتوي على أكثر من مكمم فإننا نحصل على عبارة مخالفة للأولى .

V- الإستدلالات الرياضية:

1)- الإستدلال بالترجع:

- **خاصية04:**

إذا كانت $\mathrm{P}(n)$ دالة عبارية متغيرها n عدد صحيح طبيعي بحيث :

$\mathrm{P}(0)$ عبارة صحيحة و $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ ، فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : \mathrm{P}(n)$.

- **مثال01:**

لنبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^3+2n}{3} \in \mathbb{N}$.

بالنسبة ل $n=0$ لدينا : $\dfrac{0^3+2\times 0}{3} = 0 \in \mathbb{N}$ ، إذن $\mathrm{P}(0)$ عبارة صحيحة .

لنفترض أن : $\dfrac{n^3+2n}{3} \in \mathbb{N}$ لكل n من $\mathbb{N}$ ، و لنبين أن $\dfrac{(n+1)^3+2(n+1)}{3} \in \mathbb{N}$.

لدينا : $\dfrac{(n+1)^3+2(n+1)}{3} = \dfrac{n^3+2n}{3} + n^2+n+1$

و بما أن : $\dfrac{n^3+2n}{3} \in \mathbb{N}$ و $n^2+n+1 \in \mathbb{N}$ ، فإن : $\dfrac{(n+1)^3+2(n+1)}{3} \in \mathbb{N}$.

و بالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{n^3+2n}{3} \in \mathbb{N}$.

و هذا يعني أن العدد n^3+2n يقبل القسمة على 3 مهما يكن n من $\mathbb{N}$.

- **مثال02:**

لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع : $S_n = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+....+\dfrac{1}{4n^2-1}$.

لدينا : $S_1 = \dfrac{1}{3}$ و $S_2 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15} = \dfrac{2}{5}$ و $S_3 = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35} = \dfrac{3}{7}$.

لنبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \dfrac{n}{2n+1}$

نفترض أن : $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، و لنبين أن : $S_{n+1} = \dfrac{n+1}{2(n+1)+1}$

لدينا : $S_{n+1} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+...+\dfrac{1}{4n^2-1}+\dfrac{1}{4(n+1)^2-1} = S_n + \dfrac{1}{4(n+1)^2-1}$

و $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$ ، إذن : $S_{n+1} = \dfrac{n}{2n+1} + \dfrac{1}{(2n+1)\times(2n+3)} = \dfrac{n(2n+3)+1}{(2n+1)\times(2n+3)}$

و بما أن : $n(2n+3)+1 = (n+1)\times(2n+1)$

فإن : $S_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n+3} = \dfrac{n+1}{2(n+1)+1}$.

و بالتالي : $\forall n \in \mathbb{N}^* : S_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

2)- الإستدلال بالخلف:

- **قانون الخلف:**

العبارة : $((\neg p \Rightarrow q)$ و $(\neg p \Rightarrow \neg q)) \Rightarrow p$ قانون منطقي يسمى قانون الخلف .

- **الإستدلال بالخلف:**

للإستدلال بالخلف على صحة عبارة p ، نفترض أنها خاطئة ثم نبين إن $\neg p \Rightarrow \neg q$ حيث q عبارة صحيحة . و هذا تناقض لأن q لا يمكن أن تكون خاطئة و صحيحة في نفس الوقت .

- **مثال01:**

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث n^2 زوجي ، لنبين أن n أيضا زوجي .

لنفترض أن n ليس زوجيا ، إذن فهو عدد فردي أي أن : $n = 2k+1$ حيث $k \in \mathbb{N}$

ومنه فإن : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$

إذن : $n^2 = 2(2k^2+2k)+1$ أي أن n^2 عدد فردي

وهذا تناقض لأن n^2 زوجي .

إذن إفتراضنا (n ليس زوجيا) خاطىء ، و بالتالي إذا كان n^2 زوجي فإن n أيضا زوجي .

• **مثال02:**

نعتبرمستويين (P_1) و (P_2) متقاطعين وفق مستقيم (Δ) و لتكن A و B نقطتين مختلفتين من (P_1) و C نقطة من (P_2) لا تنتمي إلى (Δ) .

بين بالخلف أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

لنفترض أن النقط A و B و C مستقيمية ، هذا يعني أن $C \in (AB)$

و لدينا $(AB) \subset (P_1)$ ، إذن : $C \in (P_1)$

و بما أن $C \in (P_2)$ فإن : $C \in (P_1) \cap (P_2)$ ، أي أن $C \in (\Delta)$

و هذا تناقض (لأن $C \notin (\Delta)$) ، إذن إفتراضنا خاطىء

بمعنى أن النقط A و B و C غير مستقيمية .

• **تمرين06:**

نعتبر المجموعة $A = \{1,2,3,....,n\}$ حيث n عدد فردي ، و لتكن x_1 و x_2 و...و x_n n عنصرا من A مختلفة مثنى مثنى .

بين بالخلف أنه : $\exists k \in A / (k - x_k$ عدد زوجي$)$.

3)- **الإستدلال بفصل الحالات:**

• **قانون فصل الحالات:**

العبارة $((p \Rightarrow q)$ و $(\rceil p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$ قانون منطقي يسمى قانون فصل الحالات .

• **الإستدلال بفصل الحالات:**

للإستدلال بفصل الحالات على صحة عبارة q نبين الإستلزامين $p \Rightarrow q$ و $\rceil p \Rightarrow q$.

• **مثال:**

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \dfrac{x - E(x)}{\sqrt{x}}$.

لنبين أن : $\forall x \in]0,+\infty[: 0 \le f(x) \prec 1$.

- إذا كان $x \in]0,1[$ فإن $E(x) = 0$ ، إذن : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$

و بما أن $0 \prec x \prec 1$ فإن $0 \prec \sqrt{x} \prec 1$ أي أن : $0 \prec f(x) \prec 1$.

- ومن جهة أخرى لدينا : $E(x) \le x \prec E(x)+1$ ، إذن : $0 \le x - E(x) \prec 1$

و منه فإن : $0 \le f(x) \prec \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

و بالتالي إذا كان $x \in [1,+\infty[$ فإن : $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \le 1$

إذن : $\forall x \in [1,+\infty[: 0 \le f(x) \prec 1$.

ومما سبق نستخلص أن : $\forall x \in]0,+\infty[: 0 \le f(x) \prec 1$.

4)- **الإستدلال بمضاد العكس:**

لدينا : $(\rceil q \Rightarrow \rceil p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

إذن ، إذا كان من الصعب الإستدلال على صحة $p \Rightarrow q$ فإننا نلجأ إلى الإستدلال على صحة $\rceil q \Rightarrow \rceil p$.

يسمى هذا الإستدلال إستدلالا بمضاد العكس .

• **مثال:**

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث $x \prec y$.

بين مستدلا بمضاد العكس أن : $[x,y] \cap \mathbb{Z} = \varnothing \Rightarrow y - x \prec 1$.

يجب أن نبين أن : $y - x \ge 1 \Rightarrow [x,y] \cap \mathbb{Z} \ne \varnothing$.

لدينا من جهة : $x \prec E(x)+1$ و $E(y) \le y$

و من جهة أخرى $x + 1 \le y$ إذن $E(x)+1 \le E(y)$

إذن : $E(y) \in [x,y]$

و بما أن $E(y) \in \mathbb{Z}$ ، فإن : $[x,y] \cap \mathbb{Z} \ne \varnothing$.

• **تمرين07:**

بين بمضاد العكس أن :

$\forall x \in \mathbb{R} : x^3 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{4} \prec x \prec \dfrac{1}{2}$.

ثانوية الفتح – الخميسات
abouzakariya@yahoo.fr