**تمرين1**

1. احسب النهايات التالية $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x\frac{\ln t}{1+t^2}dt$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{\cos t}dt$ و $\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt$ و $\lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}\int_e^x Arc\tan(\ln t)dt$

2. احسب ما يلي $\int_{-1}^{1}|x|\,dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$ و $\int_0^1\frac{e^x}{1+e^x}dx$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin(2x)\cos(4x)\,dx$ و $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2dx$ و $\int_0^1 Arc\tan x\,dx$ و $\int_0^{\pi}e^x\cos x\,dx$ و $\int_0^1 x^2\sin 3x\,dx$ .

3. مستعملا مكاملة بتغيير المتغير احسب $\int_1^e(\ln x)^2dx$ ضع $t=\ln x$ و $\int_0^1\sqrt[n]{x+1}\,dx$ ضع $t=\sqrt[n]{x+1}$ $n\in IN^*$ و $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}dx$ ضع $t=\tan\frac{x}{2}$ و $\int_0^1\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx$ ضع $t=\sqrt{x}$.

**تمرين2**

**جزء1**

نعتبر الدالتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ بما يلي $\forall x\in IR\ f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}$ و $\forall x\in IR\ F(x)=\int_{-x}^x\frac{dt}{1+t^4}$.

1. بين ان $f$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وحدد $f'(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$.
2. ادرس رتابة $f$ على $\mathbb{R}$.
3. بين ان $\lim_{0}\frac{f(x)}{x}=1$ .
4. بين ان $F$ دالة فردية.
5. بين ان $\forall x\in IR\ \ F(x)=2f(x)$ واستنتج تغيرات الدالة $F$.

**جزء2**

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي $\forall n\geq1\quad u_n=\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}$

.

1. احسب $u_1$ و $u_2$.
2. ادرس رتابة $(u_n)_{n\geq1}$ وبين انها محدودة.
3. بين ان $\forall n\geq1\quad 1-u_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$ .
4. استنتج ان $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة واحسب نهايتها.

**جزء3**

في هذا الجزء نعتبر المستوى منسوبا الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. ماذا تمثل $u_4$ هندسيا .
2. احسب $u_4$.
3. احسب ب $cm^3$ حجم مجسم الدوران المولد بدوران منحنى $f$ حول محور الافاصيل على القطعة $[0,1]$ خذ $\|\vec{i}\|=2cm$ .

**تمرين3**

**جزء1**

ليكن $r$ عددا حقيقيا موجبا قطعا .

1. بين ان $\forall n\in IN\ n\geq2\ \ \int_n^{n+1}\frac{1}{x^r}dx\leq\frac{1}{n^r}\leq\int_{n-1}^n\frac{1}{x^r}dx$
2. لكل $n$ من $IN^*$ نضع $S_n=1+\frac{1}{2^r}+\frac{1}{3^r}+\ldots+\frac{1}{n^r}$ .

أ. بين ان $\forall n\geq1\ \ \int_1^{n+1}\frac{1}{x^r}dx\leq S_n\leq1+\int_1^n\frac{1}{x^r}dx$

ب. ادرس تقارب المتتالية $(S_n)_{n\geq1}$ حسب قيم $r$ .

3. نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ المعرفة ب $\forall n\geq1\ v_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n)$

.

بين ان $(v_n)_{n\geq1}$ متقاربة وان نهايتها $c$ تحقق $0\leq c\leq1$ .

**جزء2**

لتكن $f$ دالة متصلة وتناقصية على المجال $[1,+\infty[$ وموجبة عليه.

1. بين ان
$$\forall n\in IN\ n\geq2\ \ \int_n^{n+1}f(x)dx\leq f(n)\leq\int_{n-1}^n f(x)dx$$
2. لكل $n$ من $IN^*$ نضع $F_n=f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)$

.

أ. بين ان $\forall n\geq1\ \ \int_1^{n+1}f(x)dx\leq F_n\leq f(1)+\int_1^n f(x)dx$ .

ب. استنتج ان $\forall n\geq2\ \ F_n-f(1)\leq\int_1^n f(x)dx\leq F_{n-1}$ .

3. نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بما يلي
$$\forall n\geq1\quad u_n=\int_1^n f(x)dx$$
بين ان المتتاليتين $(u_n)_{n\geq1}$ و $(F_n)_{n\geq1}$ من نفس النوع.

**تمرين4**

احسب النهايات التالية

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{n}{n^2+k^2}\ \text{و}\ \lim_{n\to+\infty}n\sum_{k=1}^n\frac{e^{-\frac{n}{k}}}{k^2}\ \text{و}\ \lim_{n\to+\infty}\int_1^e x^n\ln(x)dx$$

**تمرين5.**

**جزء1**

**.1** احسب التكامل $\int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt$ حيث $x \in IR^+$ .

**.2** ا. اثبت ان $\frac{1}{(1+x)^2} \le \frac{1}{1+x}$ $\forall x \in IR^+$ .

ب. استنتج ان $\frac{x}{1+x} \le \ln(1+x)$ $\forall x \in IR^+$ .

**.3** اثبت ان

$$\forall x \in IR^+ \quad x-\frac{x^2}{2} \le \ln(1+x) \le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

**جزء2**

نعتبر الدالة $f$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} -1+e^{\frac{-2Arctanx}{\pi}}, & x \le 0 \\ \frac{\ln(1+x)-x}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

وليكن $(C)$ منحناها في المستوى المنسوب الى معلم متعامد وممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

**.1** بين ان $f$ متصلة على $IR$

**.2** ادرس قابلية اشتقاق $f$ في 0 واول النتائج المحصلة مبيانيا.

**.3** ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(C)$.

**.4** حدد $f'$ الدالة المشتقة للدالة $f$ .

**.5** ادرس تغيرات الدالة $f$ .

**.6** بين ان $f$ تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال $I$ ينبغي تحديده وحدد قصور التقابل العكسي على $IR^-$.

**.7** ارسم $(C)$ . خذ $\|\vec{i}\| = 2cm$ و $e \approx 2,7$ .

**.8** احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(C)$ والمستقيمات دات المعادلات $x=0$ و $x=-1$ و $y=0$ .

**جزء3**

نعتبر الدالة $F$ المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي

$\forall x \succ 0 \quad F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^3} f(t)\,dt$ و $F(0)=0$ . وليكن $(C')$ منحناها في المستوى المنسوب الى المعلم السابق.

**.1** ادرس اتصال $F$ في العدد 0 على اليمين.

**.2** ا. ادرس قابلية اشتقاق $F$ في العدد 0 على اليمين واول مبيانيا النتيجة المحصلة.

ب.بين ان قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وحدد $F'$ .

ج. ادرس رتابة $F$ على المجال $[0,1]$.

**.3** بين ان $\lim_{x\to+\infty} F(x)+x^6 = +\infty$

**تمرين6 جزء1**

لتكن $f$ دالة متصلة على مجال $I$ و $u$ و $v$ دالتان قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث $u(IR) \subset I$ و $v(IR) \subset I$ . نعتبر الدالة $F$ المعرفة بما يلي $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$ .

.1 تاكد ان $F$ معرفة على $\mathbb{R}$ .

.2 بين ان $F$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $F'(x)$ لكل $x$ من $\mathbb{R}$ .

**جزء2**

نعتبر الدالة $g$ المعرفة على $[0,1[$ بما يلي $\boldsymbol{g(x)} = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x}, & x \ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

**.1** بين ان $g$ متصلة على المجال $[0,1[$

**.2** نضع $u(x)=x$ و $v(x)=x^2$ و $f(x)=\frac{1}{\ln x}$ و $I=]0,1[$ ( رموز الجزء الاول ) .

أ. تاكد ان $F$ معرفة على المجال $I$ .

ب. احسب $F'(x)$ لكل $x$ من $I$ .

**.3** لكل $x$ من المجال $I$ نعتبر $c \in ]x^2,x[$

أ. بين ان

$$\frac{x(x-1)}{2\ln x} \prec \frac{x(x-1)}{\ln c} \prec \frac{x(x-1)}{\ln x}$$

ب. باستعمال مبرهنة القيمة المتوسطة استنتج ان $\lim_{x\to0^+} F(x)=0$

**.4** نضع $\forall x \in I \quad h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$

بين ان $\forall x \in I \quad h(x) = F(x)$

**.5** ا. بين ان $\forall x \in I \quad F(x) = \ln 2 + \int_x^{x^2} \frac{g(t)}{t}\,dt$

ب.استنتج ان

$$\forall x \in I \quad \frac{x+1}{2x}.\frac{(x-1)^2}{\ln x} \le F(x)-F(2) \le \frac{(x-1)^2}{\ln x}$$

ج. احسب $\lim_{x\to1^-} F(x)$

.6 احسب مساحة حيز المستوى المحصور بين $(C_g)$ والمستقيمات دات المعادلات $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ .