المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين لجهة الرباط سلا زمور زعير نيابة سلا	**الامتحان التجريبي الموحد** **للسنة الثانية من سلك البكالوريا** **دورة مـــاي 2010**	الصفحة $\frac{1}{3}$
المادة:	**الرياضيات**	**المعامل:** 9
الشعب(ة) أو المسلك :	**العلوم الرياضية (أ) و (ب)**	**مدة الإنجاز:** 4

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة

التمرين 1: (3 ن)

نعتبر المجموعة: $E = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x + y\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{-\sqrt{2}}{2}y & x - y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} / (x,y) \in IR^2 \right\}$ ونضع: $E^* = E \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

0.5 **1)** بين أن $(E,+)$ زمرة جزئية من $\left(\mathrm{M}_2(IR);+\right)$.

0.5 **2)** بين أن $(E;\times)$ جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(IR),\times)$.

3) نعتبر التطبيق: $\begin{array}{l} \varphi : C \to E \\ x+iy \mapsto M(x,y) \end{array}$

0.75 **أ)** بين أن φ تشاكل تقابلي من $(C,\times)$ نحو $(E,\times)$ وحدد مماثل كل عنصر من E^*.

0.75 **ب)** استنتج أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

0.5 **ج)** نضع $A = M(1,1)$ ، بين أن $A^n = 2^{\frac{n}{2}} M(\cos(\frac{n\pi}{4}), \sin(\frac{n\pi}{4}))$ $(\forall n \in IN^*)$,

التمرين الثاني (4 ن)

I) نعتبر في المجموعة C المعادلة : $(E) : z^2 - \alpha(1+i)z + i\alpha^2 = 0$ حيث α عدد عقدي معلوم

0.5 **1)** حل المعادلة (E).

0.5 **2)** نفترض أن $\alpha = e^{i\theta}$ حيث $\theta \in]0;\pi[$ اكتب $z_1 + 1$ و $z_2 + 1$ على الشكل المثلثي حيث z_1 و z_2 هما حلا المعادلة (E).

II) نعتبر في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر النقطة $A(\alpha)$ و التطبيق F الذي يربط كل نقطة M ذات اللحق z بالنقطة M' ذات اللحق z' حيث : $z' = (1+i)z - i\alpha$

0.25 **1)** تحقق من أن : $z' - z = i(z - \alpha)$.

0.5 **2)** استنتج طبيعة المثلث AMM'.

0.25 **3)** حدد ω لحق النقطة Ω الصامدة بالتطبيق F.

0.75 **4)** بين أن F هو مركب دوران r وتحاك h و أعط الكتابة العقدية لكل واحد منهما محددا عناصرهاالمميزة.

5) نضع $\alpha = i$ و نعتبر النقط $A_0(1+i)$ و $A_n(z_n)$ و $A_{n+1}(z_{n+1})$ حيث $F(A_n) = A_{n+1}$ حيث $z_0 = 1+i$

أ) بين أن : $z_{n+1} - i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z_n - i)$ $(\forall n \in IN)$. 0.5

ب) استنتج أن : $z_n - i = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$ $(\forall n \in IN)$. 0.25

ج) حدد قيم n لكي تكون النقط A , A_0 , A_n مستقيمية. 0.5

التمرين الثالث : (3 ن)

ليكن $n \in IN$ نضع: $p = 11n + 2$, $q = 50n + 9$ ونعتبر أن : $d = p \wedge q$

1)

أ) **بين** أن: $d = 1$. 0.5

ب) باستعمال خوارزمية اقليدس، حدد حلا خاصا للمعادلة : $(1) : \ 50x - 11y = 1$. 0.5

ج) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة (1) . 0.5

2) ليكن $a \in \mathbb{Z}$, نفترض أن $a \wedge 11 = 1$

أ) حدد باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{10} على 11. 0.5

ب) بين أن : $a^{p+q} \equiv a^{n+1}[11]$. 0.75

ج) حدد قيما للعدد n لكي يكون $a^{p+q} \equiv 1[11]$. 0.25

مسألة : (10ن)

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $f_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{x^2} - 1$ $(\forall n \in IN)$

الجزء I : نأخذ $n = 1$

1) احسب النهايتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x)$. 0.5

2) أدرس الفروع اللا نهائية لمنحنى الدالة f_1. 0.75

3) أحسب $f_1'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f_1 على $\mathbb{R}^*$. 0.5

4) بين أن h قصور الدالة f_1 على المجال $]0;2[$ تقابل من $]0;2[$ نحو مجال J يجب تحديده. 0.5

5) احسب $f(1)$ و $(h^{-1})'(e-1)$. 0.25

6) أنشئ منحنى الدالة f_1 في معلم متعامد ممنظم. 0.5

الجزء II

1) أدرس تغيرات f_n على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$. 0.5

2) بين أن المعادلة: $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $]-\infty;0[$. 0.5

3) ادرس إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $]-\infty,0[$. 0.25

4) استنتج الوضع النسبي ل (C_n) , (C_{n+1}) على المجال $]-\infty,0[$.	0.25
5) بين أن المتتالية (α_n) تزايدية واستنتج أنها متقاربة .	0.5
6) أحسب $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$.	0.5
7) نضع: $w_n=\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\alpha_k^2}{k^2}$: $\forall n\in IN^*$ ؛ بين أن المتتالية (w_n) تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة. (لاحظ: $\forall k\geq 2\ ;\ \frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k(k-1)}$)	0.5
الجزء III	
نعتبر الدالة العددية F المعرفة بما يلي : $\begin{cases} F(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t^2}dt & ;\ x\neq 0 \\ F(0)=\frac{1}{2} \end{cases}$	
1) بين أن F معرفة على IR .	0.25
2)	
أ) بين أن : $(\forall x\geq 0)\ \frac{e^x}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^{2x}}{2}$ وأن $(\forall x\leq 0)\ \frac{e^{2x}}{2}\leq F(x)\leq\frac{e^x}{2}$.	0.5
ب) استنتج أن F متصلة في الصفر .	0.25
3) احسب : $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}F(x)$.	0.5
4)	
أ) بين أن : $(\forall x\in IR^*)\quad F(x)=e^x-\frac{e^{2x}}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
ب) بين أن F قابلة للاشتقاق على IR^* وأن $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ ;\ F'(x)=x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.5
5)	
أ) بين أن $(\forall x\geq 0)\ e^x\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^{2x}\ln 2$ و أن $(\forall x\leq 0)\ e^{2x}\ln 2\leq\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt\leq e^x\ln 2$.	0.5
ب) ب- استنتج $\lim_{x\to 0}\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
6)	
أ) تحقق أن : $(\forall x\in IR^*)\quad F(x)-\frac{1}{2}=-\frac{(e^x-1)^2}{2}+x\int_x^{2x}\frac{e^t}{t}dt$.	0.25
ب) استنتج أن F قابلة للاشتقاق في الصفر.	0.25
ج) أعط جدول تغيرات F .	0.25