سلسلة 2 الدوال اللوغاريتمية

ذ. عبد المالك اعكوبي : 2بك ع-ت

تمرين رقم 1) (باك 2006 عادية)

.I نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

1) أ- احسب $g'(x)$ لكل x من $[0;+\infty[$ ثم بين أن الدالة g تناقصية قطعا على $[0;+\infty[$.

ب- استنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $[0;+\infty[$.

2) بين أن $0\langle\ln(x+1)\langle x$ لكل x من $[0;+\infty[$.

.II نعتبر f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

1) بين أن $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

2) أ- بين أن f دالة فردية.

ب- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$.

3) أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ لكل x من D_f.

ب- استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]1;+\infty[$.

4) أ- تحقق من أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل ل ζ_f.

ب- ادرس إشارة $\ln(\dfrac{x+1}{x-1})$ (إشارة $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$).

ج- استنتج الوضع النسبي ل ζ_f و (Δ).

5) أنشى ζ_f في م.م.م $\left(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ (إشارة $\sqrt{3}\simeq 1,7$ و $f(\sqrt{3})\simeq 3$).

6) ا- بين أن $\int_2^4 \ln(\frac{x+1}{x-1})dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$

(يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء).

ب- استنتج مساحة الحيز المحصور ب ζ_f و المستقيمات التي معادلاتها هي $x=2$ و $x=4$ و $y=x$.

حلول التمرين 1)

I. لدينا $g(x)=\ln(x+1)-x$ لكل x من $[0\,;+\infty[$

1) ا- $g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=-\frac{x}{1+x}\langle 0$ إذن g تناقصية قطعا على $[0\,;+\infty[$

ب- $g(0)=0$ و g تناقصية قطعا على $[0\,;+\infty[$ إذن $g(x)\le g(0)$ لكل x من $[0\,;+\infty[$.

2) $g(x)\le 0 \Rightarrow \ln(x+1)-x\le 0 \Rightarrow \ln(x+1)\le x$

وبما أن $1\le 1+x$ فان $0\le \ln(x+1)$ ومنه $0\le \ln(x+1)\le x$.

II. $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
إشارة $\frac{x+1}{x-1}$	+	-	‖	+

إذن: $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2) ا- f فردية

ب- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3) ا- $f'(x) = \dfrac{x^2-3}{x^2-1}$ لكل x من $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

ب-

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		-	|	+	
f(x)	$+\infty$	↘	3	↗	$+\infty$

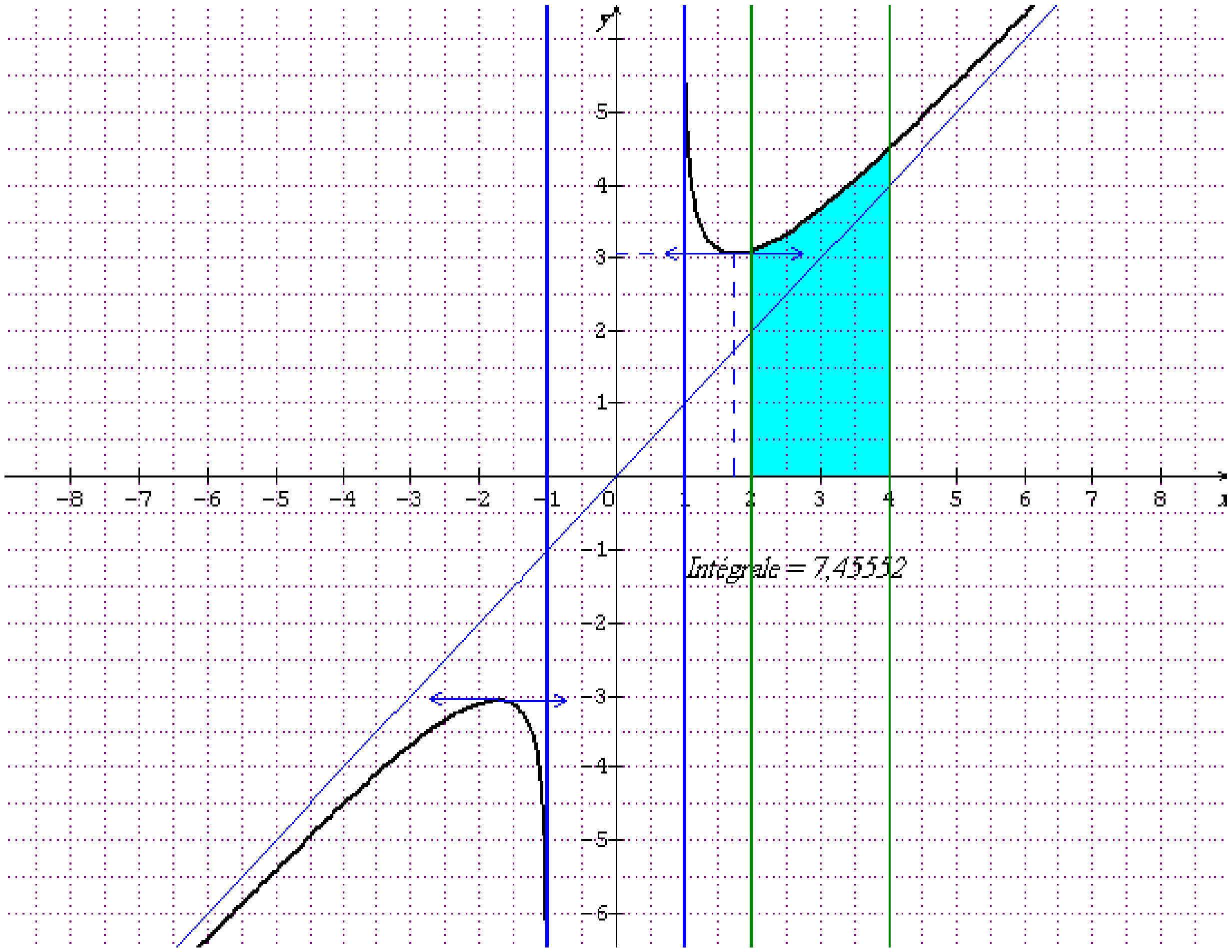
4) ا- $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\dfrac{x+1}{x-1}) = \ln(1) = 0$

المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل ل ζ_f.

ب- $\dfrac{x+1}{x-1} = 1+\dfrac{2}{x-1} \Rightarrow \dfrac{x+1}{x-1}-1 \rangle 0; \forall x \rangle 1 \Rightarrow \ln(\dfrac{x+1}{x-1}) \rangle 0$

ج- ζ_f فوق (Δ) بجوار $+\infty$ لان $f(x)-x \geq 0$.

(5



(6 أ-

$$\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 5\ln 5 - 6\ln 3$$

($u'(x) = 1$ و $v(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$)

ب- $A(\Delta) = (5\ln 5 - 6\ln 3)u.a = (5\ln 5 - 6\ln 3).1cm^2$.

تمرين رقم 2 (باك 2007 استدراكية)

I. نعتبر g الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$

1) بين أن $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج تغيرات g على $]0;+\infty[$.

2) بين أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$ وان $g(x)\geq 0$ لكل x من $]1;+\infty[$

(لاحظ أن $g(1)=0$).

II. نعتبر f الدالة العددية المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x+\frac{1}{x}-\ln^2(x)-2$$

1) ا- بين أن $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

ب- تحقق أن $f(\frac{1}{x})=f(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ج- احسب $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ (يمكن وضع $t=\frac{1}{x}$) ثم أول هندسيا النتيجة.

د- بين أن ζ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب المستقيم الذي معادلته $y=x$.

2) بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.

3) أنشئ ζ_f في معلم م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

4) ا- بين أن الدالة $H(x)=x\ln(x)-x$ دالة أصلية ل $h(x)=\ln(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن $\int_1^e \ln^2(x)dx=e-2$

ج- حدد مساحة حيز المستوى المحصور بين ζ_f و محور الافاصيل و المستقيمين $\Delta_1:x=1$ و $\Delta_2:x=e$.

mathyoussef@yahoo.fr

حلول التمرين2: I. 1) $\forall\ x \in\ ]0\,;+\infty[$

إذن $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln(x)$ ، $g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-2.\frac{1}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$

إذن تزايدية قطعا على $]0\,;+\infty[$.

(2

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g'(x)$	||	$+$	
$g(x)$	||	0 ↗	

اذن $\boxed{g(x)\geq 0; x\geq 1; g(x)<0; 0<x<1}$

II. نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي :

1) أ- $f(x)=x+\frac{1}{x}-\ln^2(x)-2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln^2(t^2)}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}-\ln^2(x)-2\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2}{x}\right)=+\infty$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}$.

ب- $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{1}{x}}-\ln^2\frac{1}{x}-2=x+\frac{1}{x}-\ln^2(x)-2=f(x)$

ج-
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} - \ln^2(x) - 2 = \lim_{t\to +\infty} \frac{1}{t} + t - \ln^2 t - 2$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{t} + t\left(1 - \frac{\ln^2 t}{t} - \frac{2}{t}\right) = +\infty$$

اذن
$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$$

اذن ζ_f يقبل محور الاراتيب كمقارب.

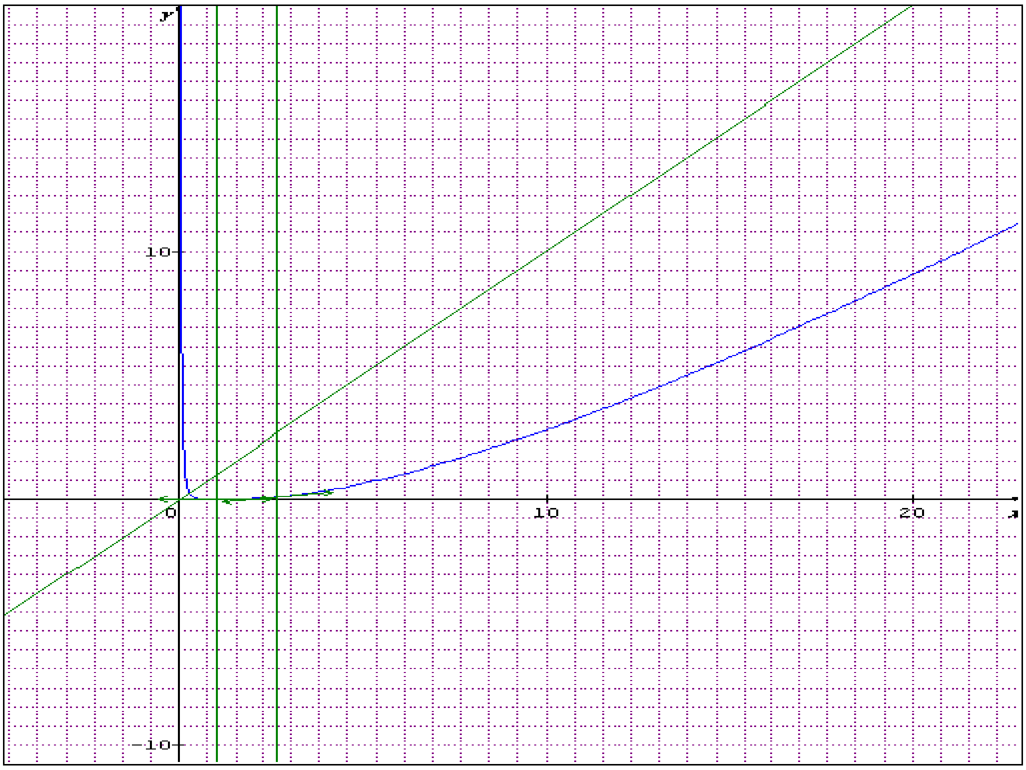
د-
$$\lim_{x\to +\infty} f(x) - x = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x} - \ln^2 x - 2\right) = -\infty$$

إذن ζ_f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب المستقيم الذي معادلته $y = x$.

(2
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{x^2 - 1 - 2x\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x}$$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

(3



4) أ- $H(x) = x\ln x - x$

$$H'(x) = (x\ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x ; \forall x \in]0;+\infty[$$

اذن H دالة أصلية ل $\ln$ على $]0;+\infty[$.

ب- نضع

$$u'(x) = \frac{1}{x} ; u(x) = \ln x$$

$$v(x) = x\ln x - x ; v'(x) = \ln x$$

$$\int_1^e \ln^2(x)dx = [\ln x(x\ln x - x)]_1^e - \int_1^e (\ln x - 1)dx = -[x\ln x - x - x]_1^e$$

$$[-x\ln x + 2x]_1^e = 2 - e$$

ج- $\mathrm{A} = (\int_1^e f(x)dx)u.a = (2-e)cm^2$.

تمرين رقم 3) (تجريبي 2008 ث.ت.وادي الذهب)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :
$$\begin{cases} f(x) = 2x(1-\ln(x)); x > 0 \\ f(x) = \sqrt{1-e^{2x}}; x \le 0 \end{cases}$$

1) ا- بين أن متصلة في 0.

ب- ادرس اشتقاق f في 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصلتين .

2) ادرس تغيرات f على $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول التغيرات.

3) ا- ادرس الفروع اللانهائية ل ζ_f.

ب- حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$.

ج- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[1;2]$.

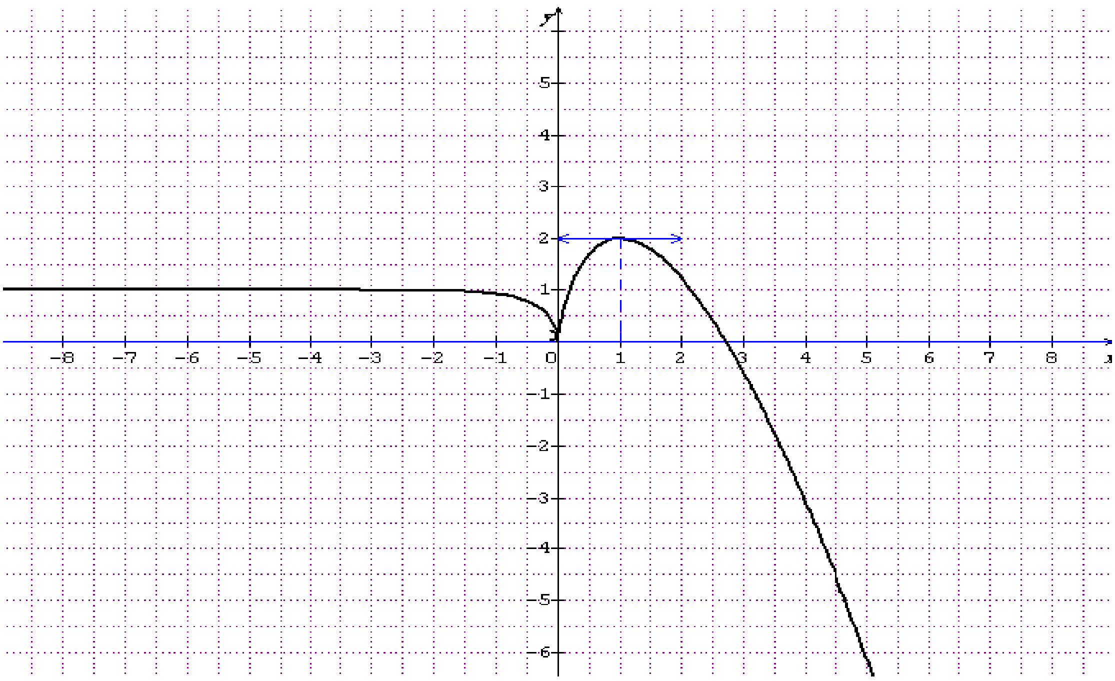
د- أنشئ ζ_f في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$.

4) لتكن g قصور الدالة f على المجال $]-\infty;0]$.

ا- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده.

ب- انشئ في نفس المعلم $\zeta_{g^{-1}}$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.



تمرين رقم 4) (باك 84)

I. نعتبر الدالة العددية المعرفة كالتالي $f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- بين أن $f(x)=xe^{2x}\left[1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}}\right]$ **واستنتج** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ج- ادرس تغيرات f .

2) أ- ادرس الفروع اللا نهائية ل ζ_f .

ب- بين أن ζ_f **يقطع محور الافاصيل في نقطة أفصولها ينتمي إلى المجال** $[-2;-1]$.

$$(e\simeq\frac{11}{4}\,;\,e^{2}\simeq\frac{15}{2}\,;\,e^{4}\simeq\frac{225}{4})$$

ج- أنشئ ζ_f **في م.م.م** $(o;\vec{i};\vec{j})$ **(نأخذ الوحدة هي** $2cm$ **و** $\ln(2)\simeq 0,7$ **)** .

3) استعمل ζ_f **لإعطاء عدد حلول المعادلة** $x(e^{x}-4)=(m+2)e^{-x}+\frac{e^{x}}{2}-4$ **مع** $x\in\mathbb{R}$.

4) ا- باستعمال مكاملة بالاجزاء احسب التكاملين $I=\int_{\lambda}^{0}(x-1)e^{x}dx$ و $J=\int_{\lambda}^{0}(x-\frac{1}{2})e^{2x}dx$

ب- استنتج مساحة الحيز المحصور ب ζ_f و المستقيمات $\Delta_3:x=0;\Delta_2:x=\lambda;\Delta_1:y=-2$

ثم احسب نهايتها عندما تؤول λ الى $-\infty$.

II. نعتبر الدالة العددية المعرفة كالتالي :

$$\begin{cases} g(x)=(x^2-4x)\ln(x)-\frac{1}{2}(x^2-8x+4);x\rangle 0 \\ g(0)=-2 \end{cases}$$

1) بين أن : $\forall x\rangle 0; g(x)=f(\ln(x))$

2) ادرس اتصال و اشتقاق الدلة g على يمين 0 .

3) احسب $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ وادرس تغيرات g على $\mathbb{R}^+$.

4) ا- ادرس الفروع اللانهائية ل ζ_g.

ب- استنتج من I.2)ب تاطيرا لا فصول نقطة تقاطع ζ_g مع محور الافاصيل

ج- أنشئ ζ_g في م.م.م $(o;\vec{i};\vec{j})$ (نأخذ الوحدة هي 2 cm).

حلول التمرين4:

I.1) - $$f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$$

ا-

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(xe^{2x}-\frac{1}{2}e^{2x}-4xe^{x}+4e^{x}-2)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{2}(2xe^{2x})-\frac{1}{2}e^{2x}-4xe^{x}+4e^{x}-2\right]=-2$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{2x}(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}})=+\infty$$

إذن $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

ب- لدينا $f(x)=(x-\frac{1}{2})e^{2x}-4(x-1)e^{x}-2$

$\boxed{D_f=\mathbb{R}}$ و $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2}$ و $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

$$f'(x)=2xe^{x}(e^{x}-2)$$

$$f'(x)=2xe^{x}(e^{x}-2)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ او } x=\ln 2$$

x	- ∝		0		Ln2		+ ∞
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-2	↗	3/2	↘	4 - 4ln2	↗	+ ∞

2) ا- لدينا $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-2$ اذن $y=-2$ مقارب ل ζ_f بجوار $-\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ اذن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{2x}(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}})}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(1-\frac{1}{2x}-\frac{4}{e^{x}}+\frac{4}{xe^{x}}-\frac{2}{xe^{2x}})=+\infty$$

ومنه ζ_f يقبل محور الاراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

ب-

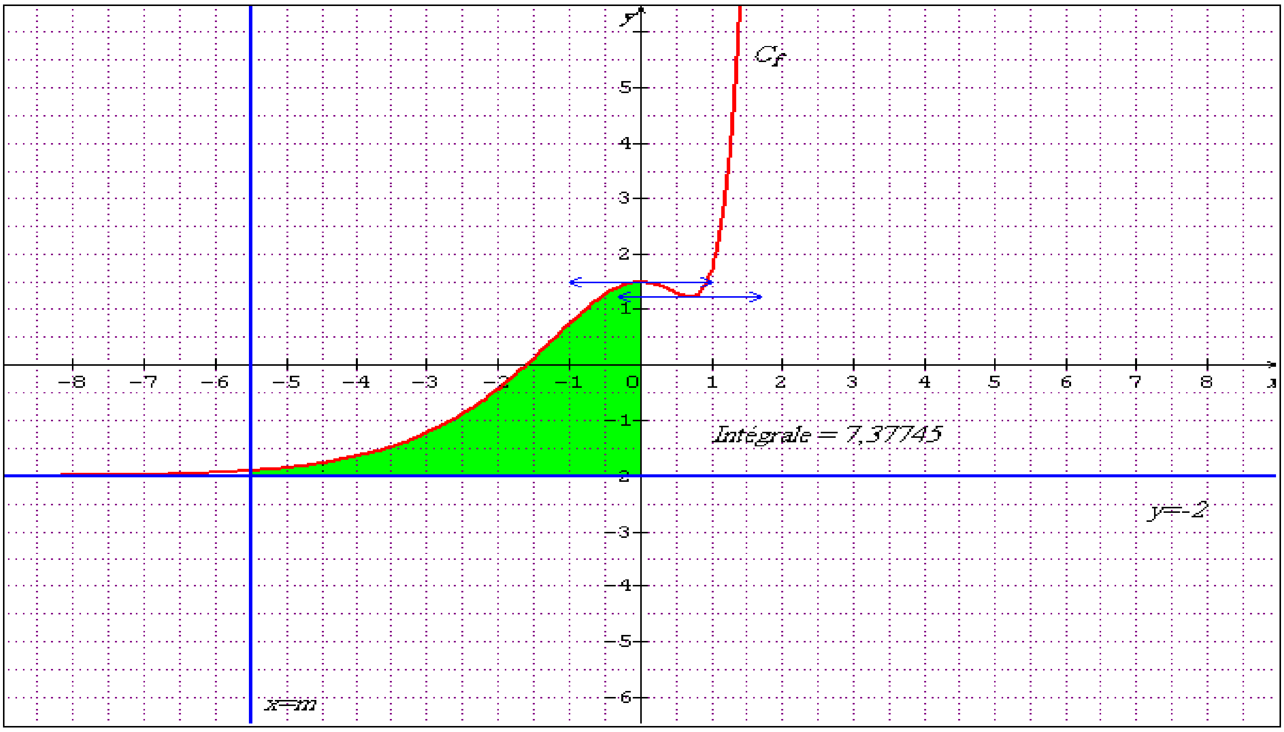
$$f(-1)=\frac{-3}{2e^{4}}+\frac{8}{e}-2>0$$

$$f(-2)=\frac{5}{2e^{4}}+\frac{12}{e^{2}}-2<0$$

اذن حسب ***T.V.I***

$$\exists\ \alpha\in\left]-2\,;\,-1\right[\ /\ f(\alpha)=0$$

ج-



(3

$$x\left(e^{x}-1\right)=(m+2)e^{-x}+\frac{e^{x}}{2}-4\Leftrightarrow xe^{x}-4x=\frac{m+2}{e^{x}}+\frac{e^{x}}{2}-4e^{x}$$

$$\Leftrightarrow xe^{2x}-4xe^{x}=m+2+\frac{e^{2x}}{2}-4e^{x}\Leftrightarrow m=f(x)$$

- إذا كان ***m≤-2*** ليست هناك حلول
- إذا كان ***-2<m<4-ln2*** هناك حل واحد
- إذا كان ***m 4-ln2*** هناك حلان
- إذا كان ***4-ln2<m<3/2*** هناك3 حلول
- إذا كان ***m=3/2*** هناك حلان
- إذا كان ***m>3/2*** هناك حل واحد.

mathyoussef@yahoo. fr

4) أ- نضع $u'(x)=1;u(x)=x-1$ **و** $v(x)=e^{x};v'(x)=e^{x}$

$$\int_{\lambda}^{0}(x-1)e^{x}dx=\left[(x-1)e^{x}\right]_{\lambda}^{0}-\int_{\lambda}^{0}e^{x}dx=\left[(x-1)e^{x}-e^{x}\right]_{\lambda}^{0}=-2-(\lambda-2)e^{\lambda}$$

إذن $\boxed{I=-2-(\lambda-2)e^{\lambda}}$

بنفس الطريقة نبين أن $\boxed{J=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\lambda-1)e^{2\lambda}}$

ب-
$$A=\left(\int_{\lambda}^{0}(f(x)+2)dx\right)u.a=\int_{\lambda}^{0}(x-\frac{1}{2})e^{2x}-4(x-1)e^{x}dx)u.a$$
$$=(-2(\lambda-1)e^{2\lambda}+16(\lambda-2)e^{\lambda}+30)cm^{2}$$

(1u.a=4cm²)

.II

لدينا
$$\begin{cases} g(x)=(x^{2}-4x)\ln(x)-\frac{1}{2}(x^{2}-8x+4);x\rangle 0 \\ g(0)=-2 \end{cases}$$

1) لكل x موجب قطعا لدينا

$$f(\ln x)=(\ln x-\frac{1}{2})e^{2\ln x}-4(\ln x-1)e^{\ln x}-2=(\ln x-\frac{1}{2})e^{\ln x^{2}}-4x(\ln x-1)-2$$
$$=(\ln x-\frac{1}{2})x^{2}-4x(\ln x-1)-2=(x^{2}-4x)\ln x-\frac{1}{2}x+4x-2=(x^{2}-4x)\ln x-\frac{1}{2}(x^{2}-8x+4)$$

إذن $\forall x\rangle 0;\ f(\ln x)=g(x)$.

(2
$$\lim_{x\to 0^{+}}g(x)=\lim_{x\to 0^{+}}f(\ln x)=\lim_{t\to -\infty}f(t)=-2=g(0)$$

إذن g متصلة على يمين 0.

$$\lim_{x\to 0^{+}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{(x^{2}-4x)(\ln x-\frac{1}{2}(x^{2}-8x+4)+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^{+}}\left[(x-4)\ln x-\frac{1}{2}(x-8)\right]=+\infty$$

إذن غير ق.ا على يمين 0 و المنحنى يقبل نصف مماس على يمين النقطة التي أفصولها 0

موجه نحو الأعلى معادلته $x=0$.

3) $D_g = [0;+\infty[$ و $g(0)=0$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(\ln x) = \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$

$$\forall x \rangle 0; g'(x) = 2(x-2)\ln x$$

x	0		1		2		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	-	|	+	
f(x)	-2	↗	$9/2$	↘	$4-4\ln 2$	↗	$+\infty$

4) ا- لدينا $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\ln x)}{x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{e^t} = \lim_{t\to+\infty} \left[(t-\frac{1}{2})e^t - 4(t-1) - \frac{2}{e^t} \right]$

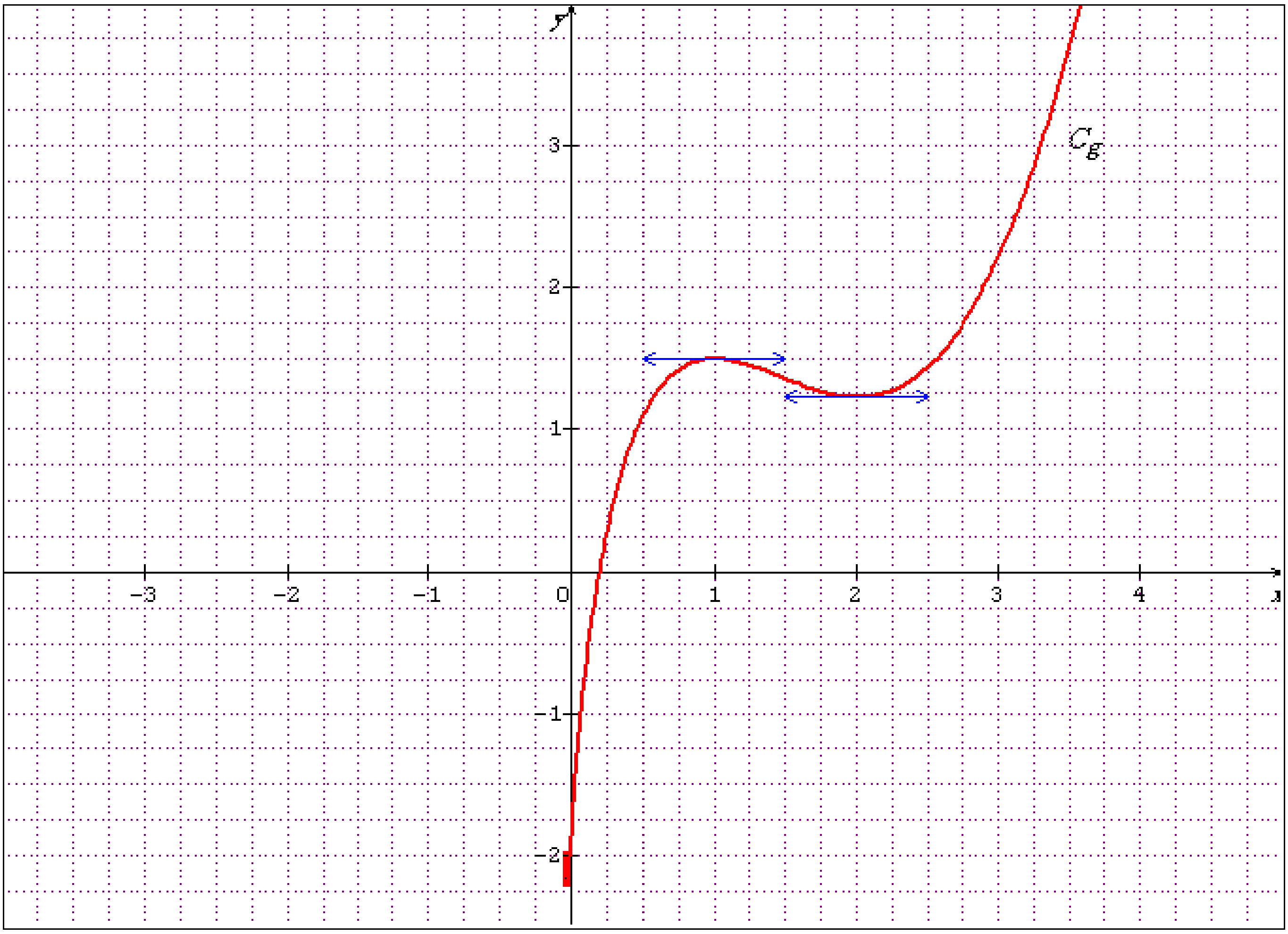
$= \lim_{t\to+\infty} t \left[(1-\frac{1}{2t})e^t - 4(1-\frac{1}{t}) - \frac{2}{te^t} \right] = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = +\infty$$

إذن ζ_g يقبل محور الاراتيب كاتجاه مقارب بجوار $+\infty$.

ب- $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0 \Leftrightarrow -2 \le \ln x \le -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{e^2} \le x \le \frac{1}{e}$

إذن $\boxed{-\frac{1}{e^2} \le x \le \frac{1}{e}}$.



y
3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3
4
x
C_g