الثانية بكالوريا علوم فيزيائيــة الثانية بكالوريا علوم الحياة والأرض	تصحيـــــح الامتحان الوطنـــــي الموحـــــــد للبكالوريـــــــــــــا الدورة العاديـــــة 2009	الأستاذ : محمد الحيان

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$، النقط $A\left(-2,2,8\right)$ و $B\left(6,6,0\right)$ و $C\left(2,-1,0\right)$ و $D\left(0,1,-1\right)$ و $\left(S\right)$ مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$.

1. لدينا : $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&1\\0&-1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&0\\0&-1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$. إذن مثلوث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ هو $\left(1,2,2\right)$.

لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$ متجهة منظمية على المستوى $\left(OCD\right)$. إذن :

$$M\in\left(OCD\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\left(\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow x+2y+2z=0$$

وبالتالي فإن $x+2y+2z=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $\left(OCD\right)$.

2. لتكن $M\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفضاء. لدينا :

$$M\in\left(S\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}-2-x\\2-y\\8-z\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\6-y\\-z\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow\left(-2-x\right)\left(6-x\right)+\left(2-y\right)\left(6-y\right)+\left(8-z\right)\left(-z\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-8y-8z=0$$
$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2+\left(z-4\right)^2=36$$

وبالتالي فإن $\left(S\right)$ فلكة مركزها $\Omega\left(2,4,4\right)$ وشعاعها $R=\sqrt{36}=6$.

3. أ- مسافة النقطة $\Omega\left(2,4,4\right)$ عن المستوى $\left(OCD\right)$ هي : $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=\dfrac{\left|2+\left(2\times4\right)+\left(2\times4\right)\right|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{18}{3}=6=R$.

ب- بما أن $d\left(\Omega,\left(OCD\right)\right)=R$، فإن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$.

جـ- لدينا : $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}-2\\2\\8\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix}=\left(-2\times6\right)+\left(2\times6\right)+\left(8\times0\right)=-12+12=0$.

بما أن : $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-12+12=0$، فإن : $O\in\left(S\right)$. ولدينا : $O\in\left(OCD\right)$.

وبما أن المستوى $\left(OCD\right)$ مماس للفلكة $\left(S\right)$، فإن O هي نقطة تماس الفلكة $\left(S\right)$ والمستوى $\left(OCD\right)$.

التمرين الثاني :

نعتبر، في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $a=2-2i$ و $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ و $c=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i$.

1. لدينا : $a=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left[2\sqrt{2},-\frac{\pi}{4}\right]=\boxed{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}$

و لدينا : $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\left[1,\pi-\frac{\pi}{6}\right]=\left[1,\frac{5\pi}{6}\right]=\boxed{e^{i\frac{5\pi}{6}}}$.

2. نعتبر الدوران R الذي مركزه النقطة O وزاويته $\frac{5\pi}{6}$.

أ- ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالدوران R. لدينا :

$$z'=R(z)\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{5\pi}{6}}z\Leftrightarrow\boxed{z'=bz}.$$

ب- لتكن C'، صورة النقطة A بالدوران R، لحقها c'. لدينا :

$$c'=ba=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2-2i)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}i+i+1=1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)i=c.$$

إذن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R.

3. حسب السؤال (2.ب-) ، لدينا : $c=ba$. إذن :

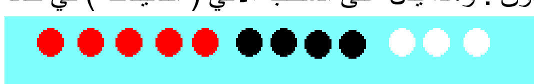
$$\begin{aligned}\arg(c)&\equiv\arg(ab)&[2\pi]\\&\equiv\arg(a)+\arg(b)&[2\pi]\end{aligned}$$

وحسب السؤال 1. ، نستنتج أن :

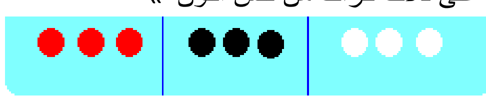
$$\begin{aligned}\arg(c)&\equiv\arg(a)+\arg(b)&[2\pi]\\&\equiv-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}&[2\pi]\\&\equiv\frac{7\pi}{12}&[2\pi]\end{aligned}$$

التمرين الثالث :

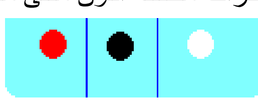
يحتوي صندوق على 3 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء و 5 كرات حمراء (لا يمكن التمييز بين الكرات باللمس) .
نسحب عشوائيا و**تآنيا** ثلاث كرات من الصندوق . وهذا يدل على السحب الآني (التأليفات) في حالة فرضية تساوي الاحتمال.



1. نعتبر الحدثين التاليين : A :« الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون »



و B :« الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثنى مثنى »



احتمال الحدث A هو : $p(A)=\frac{C_5^3+C_4^3+C_3^3}{C_{12}^3}=\frac{10+4+1}{220}=\frac{15}{220}=\boxed{\frac{3}{44}}$.

احتمال الحدث B هو : $p(B)=\frac{C_5^1C_4^1C_3^1}{C_{12}^3}=\frac{60}{220}=\boxed{\frac{3}{11}}$.

2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة لثلاث كرات بعدد الألوان التي تحملها.

أ- القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X هي : 1 و 2 و 3 . ولدينا : $X(\Omega)=\{1,2,3\}$.

ب- لدينا : $p(X=1)=p(A)=\frac{3}{44}$ و $p(X=3)=p(B)=\frac{3}{11}$

و : $p(X=2)=1-\left(p(X=1)+p(X=3)\right)=1-\left(\frac{3}{44}+\frac{3}{11}\right)=1-\frac{15}{44}=\frac{29}{44}$

أو : $p(X=2)=\frac{C_3^2C_9^1+C_4^2C_8^1+C_5^2C_7^1}{C_{12}^3}=\frac{(3\times 9)+(6\times 8)+(10\times 7)}{220}=\frac{145}{220}=\frac{29}{44}$

$\left(BB\overline{B} \text{ أو } NN\overline{N} \text{ أو } RR\overline{R} \right)$

قانون احتمال المتغير العشوائي X :

x_k	1	2	3
$p_k=p(X=x_k)$	$\frac{3}{44}$	$\frac{29}{44}$	$\frac{3}{11}$

الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{3}x_kp_k=\left(1\times\frac{3}{44}\right)+\left(2\times\frac{29}{44}\right)+\left(3\times\frac{3}{11}\right)=\frac{97}{44}\approx 2,2$$

التمرين الرابع :

نضع : $I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}\,dx$ و $J=\int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx$.

1. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}-\{-3\}$. لدينا : $\frac{x}{x+3}=\frac{x+3-3}{x+3}=1-\frac{3}{x+3}$.

ب- حساب التكامل I :

$$I=\int_{-2}^{-1}\frac{x}{x+3}dx=\int_{-2}^{-1}1-\frac{3}{x+3}dx=\left[x-3\ln|x+3|\right]_{-2}^{-1}=(-1-3\ln 2)-(-2-3\ln 1)=\boxed{1-3\ln 2}$$

2. حساب التكامل J :

$$\begin{aligned}
J &= \int_{-2}^{-1}\ln(2x+6)\,dx=\int_{-2}^{-1}x'\ln(2x+6)\,dx\\
&= \left[x\ln(2x+6)\right]_{-2}^{-1}-\int_{-2}^{-1}x\left(\ln(2x+6)\right)'dx\\
&= -\ln 4+2\ln 2-\int_{-2}^{-1}\frac{2}{2x+6}\,dx\\
&= -\int_{-2}^{-1}\frac{1}{x+3}\,dx\\
J &= -I = -1+3\ln 2
\end{aligned}$$

التمرين الخامـــــــس :

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x بحيث : $f(x)=2\ln\left(e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2\right)$ ، و ليكن $\mathscr{C}$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

I. 1. ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

✓ $e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+2=e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+1+1=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1$.

✓ **حيز تعريف الدالة** f : بما أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ e^{2x}-2\sqrt{e^{x}}+2=\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1>0$ ، فإن :

$\mathscr{D}_f=\left\{x\in\mathbb{R}\ /\ e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2>0\right\}=\mathbb{R}$.

✓ لكل x من $\mathbb{R}$ ، لدينا : $e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2>0\Rightarrow\dfrac{e^{x}-2\sqrt{e^{x}}+2}{e^{x}}>0\Rightarrow 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}>0$. إذن :

$\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 1-\dfrac{2}{\sqrt{e^{x}}}+\dfrac{2}{e^{x}}>0$.

2. لدينا :

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)=+\infty$ ، لأن :

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1=+\infty$ و $\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$.

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)=2\ln 2=\boxed{\ln 4}$ ، لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln x=0$ ، ومنه نستنتج أن

المنحنى $\mathscr{C}$ يقبل مقاربا أفقيا بجوار $-\infty$ معادلته : $y=\ln 4$.

3. أ- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا :

$$f'(x)=2\ln\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)'=2\frac{\left(\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1\right)'}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}=2\frac{2\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)'\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}=2\frac{\cancel{2}\dfrac{e^{x}}{\cancel{2}\sqrt{e^{x}}}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}$$

$$f'(x)=\boxed{\frac{2\sqrt{e^{x}}\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{x}}-1\right)^{2}+1}}$$

ولدينا : $f'(0)=\dfrac{2\sqrt{e^{0}}\left(\sqrt{e^{0}}-1\right)}{\left(\sqrt{e^{0}}-1\right)^{2}+1}=\boxed{0}$.

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^{x}}-1=\dfrac{e^{x}-1}{\sqrt{e^{x}}+1}$. إذن إشارة $\sqrt{e^{x}}-1$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $e^{x}-1$. ولدينا :

$x\geq 0\Rightarrow e^{x}\geq 1\Rightarrow e^{x}-1\geq 0$ و $x\leq 0\Rightarrow e^{x}\leq 1\Rightarrow e^{x}-1\leq 0$. ومنه نستنتج أن :

$\forall x\in\left[0,+\infty\right[\ :\ \sqrt{e^{x}}-1\geq 0$ و $\forall x\in\left]-\infty,0\right]\ :\ \sqrt{e^{x}}-1\leq 0$.

بما أن $\forall x \in \mathbb{R} \ : f'(x)=\dfrac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{\left(\sqrt{e^x}-1\right)^2+1}$ ، فإن إشارة $f'(x)$ هي على إشارة $\sqrt{e^x}-1$.

وعليه فإن : $\forall x \in [0,+\infty[\ : f'(x)\geq 0$ و $\forall x \in]-\infty,0] \ : f'(x)\leq 0$.

إذن : f تزايدية على المجال $[0,+\infty[$ وتناقصية على المجال $]-\infty,0]$.

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\ln 4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا :

$$f(x)=2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)=2\ln\left(e^x\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)\right)=2\ln\left(e^x\right)+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

$$f(x)=2x+2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)$$

ب- بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x=\lim\limits_{x\to+\infty} 2\ln\left(1-\frac{2}{\sqrt{e^x}}+\frac{2}{e^x}\right)=\boxed{0}$ ، فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=2x$ مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ بجوار $+\infty$.

5. أ- ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا : $\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)=e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2=e^x-3\sqrt{e^x}+2$.

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$. لدينا : $\sqrt{e^x}-2=\dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x}+2}$. إذن إشارة $\sqrt{e^x}-2$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة e^x-4 .

ولدينا : $x=\ln 4 \Leftrightarrow e^x=4 \Leftrightarrow e^x-4=0$. ومنه فإن :

x	$-\infty$		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$	0	$+$	

ونعلم إشارة $\sqrt{e^x}-1$ على $\mathbb{R}$ حسب السؤال (3. ب-) . إذن :

x	$-\infty$		0		$\ln 4$		$+\infty$
$\sqrt{e^x}-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\sqrt{e^x}-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)$		$+$		$-$		$+$	

جـ- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

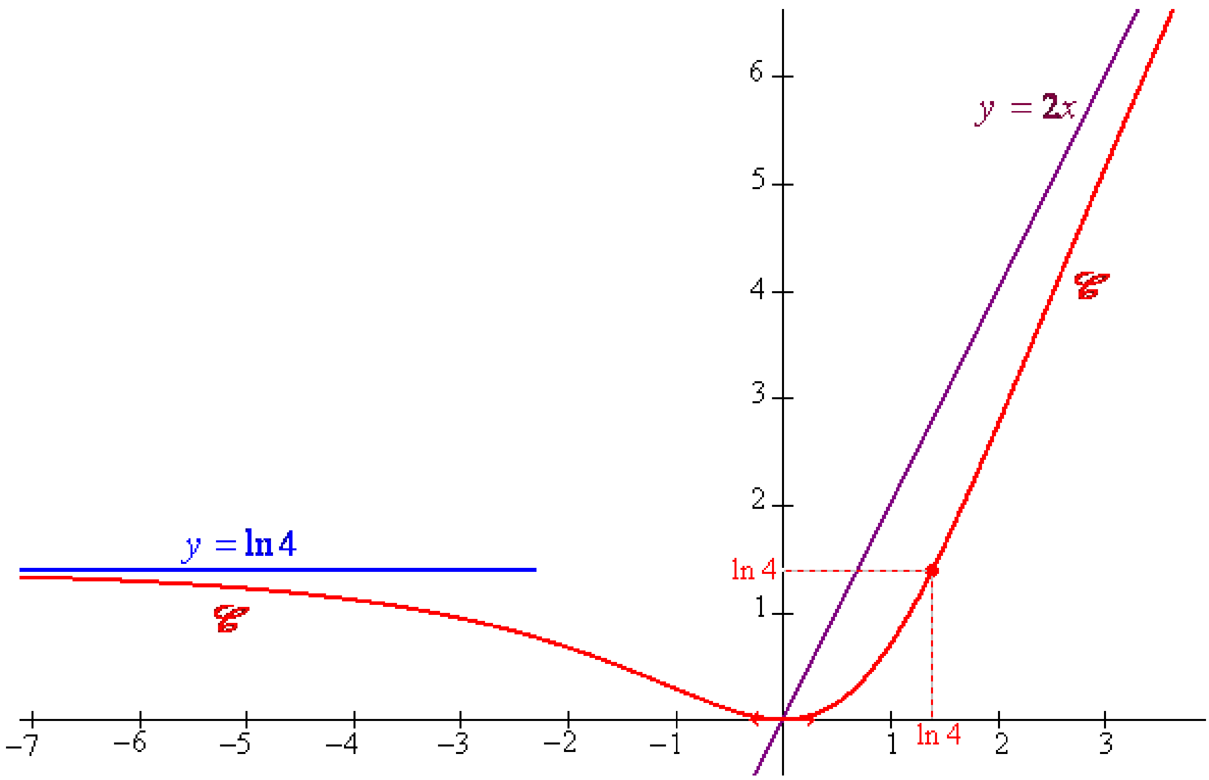
$$\left(\sqrt{e^x}-1\right)\left(\sqrt{e^x}-2\right)\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}-\sqrt{e^x}+2\leq 0 \Rightarrow e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}$$

د- حسب السؤال أعلاه ، لكل x من المجال $\left[0,\ln 4\right]$ ، لدينا :

$$e^x-2\sqrt{e^x}+2\leq\sqrt{e^x}\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\ln\left(\sqrt{e^x}\right)\Rightarrow\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq\frac{1}{2}x$$
$$\Rightarrow 2\ln\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)\leq x \Rightarrow f\left(x\right)\leq x$$

إذن : $\forall x\in\left[0,\ln 4\right]\ :\ f\left(x\right)\leq x$.

6. إنشاء المنحنى $\mathscr{C}$:



II. نعتبر المتتالية العددية $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=f\left(u_n\right)\quad ;\quad n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1. لدينا :

- ✓ من أجل $n=0$ ، $u_0=1$. إذن : $0\leq u_0\leq\ln 4$.
- ✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$. نعترض أن : $0\leq u_n\leq\ln 4$ ، ونبين أن : $0\leq u_{n+1}\leq\ln 4$.

  نعلم أن f تزايدية على المجال $\left[0,\ln 4\right]$. إذن :

$$0\leq u_n\leq\ln 4\Rightarrow f\left(0\right)\leq f\left(u_n\right)\leq f\left(\ln 4\right)\Rightarrow 0\leq u_{n+1}\leq\ln 4.$$

- ✓ وبالتالي فإن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ 0\leq u_n\leq\ln 4$.

2. نعلم أن : $f(x) \leq x \quad : \forall x \in [0,\ln 4]$ ، وأن : $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; 0 \leq u_n \leq \ln 4$.

إذن : $f(u_n) \leq u_n \; : \forall n \in \mathbb{N}$. أي : $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; u_{n+1} \leq u_n$.

وبالتالي فإن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية .

3. لدينا : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغورة بالعدد 0 . إذن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة.

وبما أن :

- f متصلة على المجال $[0,\ln 4]$.
- f متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[0,\ln 4]$.

إذن : $f([0,\ln 4]) = [f(0), f(\ln 4)] = [0,\ln 4]$.

- $u_0 = 1 \in [0,\ln 4]$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها $l \in \mathbb{R}$.

فإن النهاية l تحقق الشرطان التاليان : $f(l) = l$ و $l \in [0,\ln 4]$.

ولدينا :

$$\begin{aligned}
f(l) = l \quad &\Leftrightarrow \quad 2\ln\left(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2\right) = l \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(e^l - 2\sqrt{e^l} + 2\right) = \frac{l}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e^l - 2\sqrt{e^l} + 2 = \sqrt{e^l} \\
&\Leftrightarrow \quad e^l - 3\sqrt{e^l} + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{e^l} - 1\right)\left(\sqrt{e^l} - 2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \sqrt{e^l} = 1 \quad \text{أو} \quad \sqrt{e^l} = 2 \\
&\Leftrightarrow \quad e^l = 1 \quad \text{أو} \quad e^l = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad l = 0 \quad \text{أو} \quad l = \ln 4
\end{aligned}$$

وبما أن : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ، فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; u_n \leq u_0 = 1$. إذن : $l \leq 1$. ومنه فإن : $l = 0$

خلاصة : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$