ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 04	2 بكالوريا علوم رياضية
		مدة الإنجاز : أربع ساعات
نيابة الخميسات	الدورة الأولى 2015/2014	ذ : عبدالله بن الختير

■ التمرين رقم 01: (5,5 نقطة)

⇦ ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^{*+}$ بما يلي :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); f_n(x) = -nx + \ln x .$$

1)– أ– أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$. 0,75

ب– بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); f'_n(x) = \dfrac{-nx+1}{x}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f_n . 0,75

2)– أ– بين أن : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); 2x - 1 > \ln x$. 0,5

ب– بين أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$ المعادلة : $(\mathrm{E}): f_n(x) = -2n$ تقبل بالضبط حلين إثنين u_n و v_n 1

بحيث : $0 < u_n < \dfrac{1}{n}$ و $v_n > 2$.

3)– أحسب نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ معللا جوابك و أثبت أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{e^2}$. 0,75

4)– أ– بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); f_{n+1}(v_n) < -2(n+1)$ ، ثم إستنتج رتابة $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 0,75

ب– بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة ، ثم أحسب النهايتين $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ و $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n(v_n - 2)}{\ln 2}$. 1

■ التمرين رقم 02: (5,5 نقطة)

⇦ لتكن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \text{ و } \left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\, d\theta .$$

1)– أحسب التكاملين I_1 و I_2 . 0,75

2)– أدرس رتابة المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و إستنتج أنها متقاربة . 0,75

3)– أ– تحقق أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}} \sin^n(\theta)\, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(\theta)\, d\theta$. 0,25

ب– بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right); I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\pi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]^n$. 0,75

ج– بين أن : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln[\cos x]}{x^3} = -\infty$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. 1

4)– أ– باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} \times I_n$. 0,5

ب– بين أنه لكل $n \in \mathbb{N}$ ، لدينا : $(n+1) I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$ و أن : $1 \leq \dfrac{I_n}{I_{n+1}} \leq \dfrac{n+2}{n+1}$. 1

ج– إستنتج أن : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}.I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. 0,5

■ **التمرين رقم 03:** (09 نقط)

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

1)- أ- أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 0,5

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، ثم ضع جدول تغيرات f . 0,5

2)- أ- بين أن المنحنى (C_f) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا (Δ) ينبغي تحديده . 0,5

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f''(x)=\dfrac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$ ، ثم إستنتج تقعر المنحنى (C_f) . 0,5

3)- أرسم المنحنى (C_f) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. 0,5

II- لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}^*);F(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ و $F(0)=\ln 2$.

1)- أ- بين أن : $(\forall u\in\mathbb{R}^{*+});\ln(1+u)\le u$. 0,5

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});0\le F(x)\le\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. 0,75

2)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);F(-x)=\dfrac{x}{2}+F(x)$. 0,5

ب- أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ ، ثم بين أن المنحنى (C_F) يقبل بجوار $-\infty$ مقاربا مائلا (Δ') ينبغي تحديده . 0,75

3)- أ- بين أن : $(\forall t\in\mathbb{R});f(t)=f(0)+tf'(0)+\displaystyle\int_0^t(t-u)f''(u)du$. 0,5

ب- إستنتج أن : $(\forall t\in\mathbb{R});\left|f(t)-f(0)-tf'(0)\right|\le\dfrac{1}{2}t^2$. 0,5

ج- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\left|F(x)-\ln 2+\dfrac{x}{4}\right|\le\dfrac{1}{6}x^2$ ، ثم بين أن F متصلة و قابلة للإشتقاق في الصفر محددا $F'(0)$. 1

4)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$ أن :

$(\forall x\in\mathbb{R}^*);xF'(x)=f(x)-F(x)$. 0,75

ب- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^*);\displaystyle\int_0^x f(t)dt=xf(x)+\int_0^x\frac{te^{-t}}{1+e^{-t}}dt$ ، ثم إستنتج إشارة F' على $\mathbb{R}^*$ و ضع جدول تغيرات F على $\mathbb{R}$. 0,75

5)- أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. 0,5

■ تمرين إضافي رقم 01:

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$.

ولكل $x\in\mathbb{R}$ ، نضع : $G(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$.

▪ بين أنه إذا كانت G تناقصية على $\mathbb{R}$ ، فإن الدالة f منعدمة على $\mathbb{R}$.

■ تمرين إضافي رقم 02:

⇦ لتكن $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ دالة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^+$ و تحقق ما يلي :

$f(0)=0$ و $(\exists a\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R}^+);f'(x)\le a.f(x)$.

▪ بين أن الدالة f منعدمة على $\mathbb{R}^+$ (بمعنى أنه : $(\forall x\in\mathbb{R}^+);f(x)=0$) .

■ تمرين إضافي رقم 03:

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$.

1)- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو المجال $]-1,1[$.

2)- حدد التقابل العكسي f^{-1} .

3)- أرسم (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث الوحدة هي $1cm$.

4)- ليكن $\lambda\in]0,1[$ و لتكن σ_λ مساحة الحيز المستوى (Δ_λ) المحصور بين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ والمستقيمين : $x=0$ و $x=\lambda$.

▪ بين أن : $\sigma_\lambda=\lambda^2-2\ln\left(\frac{e^\lambda+e^{-\lambda}}{2}\right)cm^2$.

II- لكل $x\in\mathbb{R}^+$ ، نضع : $F_0(x)=x$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*);F_n(x)=\int_0^x\left[f(t)\right]^n dt$.

1)- أحسب $F_1(x)$ بدلالة x .

2)- بين أن : $0\le F_n(x)\le x\left[f(x)\right]^n$ ، ثم إستنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)$.

3)- أ- تحقق أن : $(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=1-\left[f(x)\right]^2$.

ب- إستنتج أن : $(\forall k\in\mathbb{N});F_{k+2}(x)=F_k(x)-\frac{1}{k+1}\left[f(x)\right]^{k+1}$.

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);F_{2n}(x)=x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}\left[f(x)\right]^{2k-1}$.

د- أحسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\times3^{2k-1}}$.

✓ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم وجودة التحرير و الدقة في الأجوبة .