أهداف الدرس

- التعرف على العدد المشتق لدالة عددية في نقطة
- التمكن من التأويل الهندسي للعدد المشتق
- تحديد معادلة المماس لمنحنى دالة عددية في نقطة
- تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية
- التمكن من دراسة الاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في x_0 و تأويل النتائج هندسيا.
- التعرف على مماس أو نصف مماس عمودي
- التعرف على الدالة المشتقة
- توظيف العمليات على الدوال المشتقة
- توظيف و استعمال إشارة الدالة المشتقة
- تحديد المشتقات المتتالية لدالة عددية
- استعمال الدالة المشتقة في حل مسائل مستقاة من الحياة اليومية
- التعرف على الحل العام للمعادلة التفاضلية : $y'' + \omega^2 y = 0$

القدرات المنتظرة

- تقريب دالة بجوار نقطة x_0 بدالة تآلفية.
- التعرف على التأويل الهندسي للعدد المشتق
- التعرف على مشتقات الدوال المرجعية
- تحديد معادلة المماس وإنشائه
- تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها
- تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول التغيرات ومن المنحنى
- حل مسائل تطبيقية حول القيم الدنوية والقصوية

فقرات الدرس

- قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة
- الاشتقاق على اليمين و الاشتقاق على اليسار
- الدالة المشتقة لدالة عددية
- تطبيقات الدالة المشتقة
- المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2 y = 0$

I)- قابلية اشتقاق دالة عددية في نقطة

1)- العدد المشتق

نشاط01

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=2x^2$ و $x_0=1$

- أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

لدينا: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to x_0}2(x+1)=4$

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و العدد الحقيقي 4 يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة 1 و نكتب : $f'(1)=4$

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0\in I$.

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 ،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق ل f في النقطة x_0 و يرمز له ب $f'(x_0)$

تمرين01

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=x^3$ و $x_0=1$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=1$

ملاحظة1

- إذا كان $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق في x_0

ملاحظة2

- بوضع : $h=x-x_0$ لدينا: $(h\to 0\Leftrightarrow x\to x_0)$

إذن : $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}$

تمرين02

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x)=\cos x$ و $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

2)-التأويل الهندسي للعدد المشتق- المماس لمنحنى دالة عددية

تعريف

لتكن f دالة للاشتقاق في x_0 و (C) منحناها في معلم متعامد $(o,\vec{i},\vec{j})$

- المستقيم (T) المار من النقطة $A(x_0,f(x_0))$ و الذي معامله الموجه

هو $f'(x_0)$ يسمى المماس للمنحنى (C) في النقطة A.

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في x_0
معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة f في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ هي:
$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

مثــال

لنحدد معادلة المماس (T) لمنحنى الدالة $f : x \mapsto 2x^2$ في النقطة $A(1, f(1))$
لدينا : $f(1) = 2$ و $f'(1) = 4$
إذن : $(T): y = 4(x-1)+2$ أي $(T): y = 4x - 2$

ملاحظة

إذا كان $f'(x_0) = 0$ فإن (C_f) يقبل مماسا أفقيا (T) في النقطة $A(x_0, f(x_0))$
معادلته هي: $(T): y = f(x_0)$.

3)- تقريب دالة قابلة للاشتقاق في نقطة بدالة تآلفية

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في نقطة x_0.
- الدالة $u : x \mapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ أو الدالة $v : h \mapsto f'(x_0)h + f(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في x_0. حيث: $h = x - x_0$.
- العدد $f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ يسمى التقريب التآلفي ل $f(x)$ بجوار x_0 و نكتب: $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- العدد $f'(x_0)h + f(x_0)$ يسمى التقريب التآلفي للعدد $f(x_0 + h)$ بجوار 0 ونكتب: $f(x_0 + h) \approx f'(x_0)h + f(x_0)$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = 2x^2$ و $x_0 = 1$
لدينا : $f(1) = 2$ و $f'(1) = 4$
إذن : $f(x) \approx 4(x-1)+2$ أي $f(x) \approx 4x - 2$
و لدينا أيضا: $f(1+h) \approx 4h + 2$

تمرين03: التقريب المحلي لدالة بجوار x_0

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
1) – حدد التقريب التآلفي للعدد $f(1+h)$ بجوار الصفر.
2) – استنتج قيمة مقربة لكل من $\frac{1}{\sqrt{0.999}}$ و $\frac{1}{\sqrt{1.002}}$.

تمرين04

أثبت التقريبات التالية:

$(1+h)^2 \approx 1+2h$ $\quad$ $(1+h)^3 \approx 1+3h$ $\quad$ $\sqrt{1+h} \approx 1+\frac{1}{2}h$

$\frac{1}{1+h} \approx 1-h$ $\quad$ $\frac{1}{1-h} \approx 1+h$

II)- الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار

1)- تعاريف

تعريف1

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[x_0, x_0+\alpha[$ حيث $\alpha>0$

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ أو $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 على اليمين و يرمز له بالرمز $f'_d(x_0)$.

تعريف2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $]x_0-\alpha, x_0]$ حيث $\alpha>0$

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار،إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=l$ أو $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=l$
- العدد الحقيقي l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 على اليسار و يرمز له بالرمز $f'_g(x_0)$.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0\in I$.
تكون الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا و فقط إذا كانت قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين و قابلة للاشتقاق في x_0 على اليسار و كان $f'_d(x_0)=f'_g(x_0)$

2)- التأويل الهندسي – نصف مماس لمنحنى دالة

خاصية

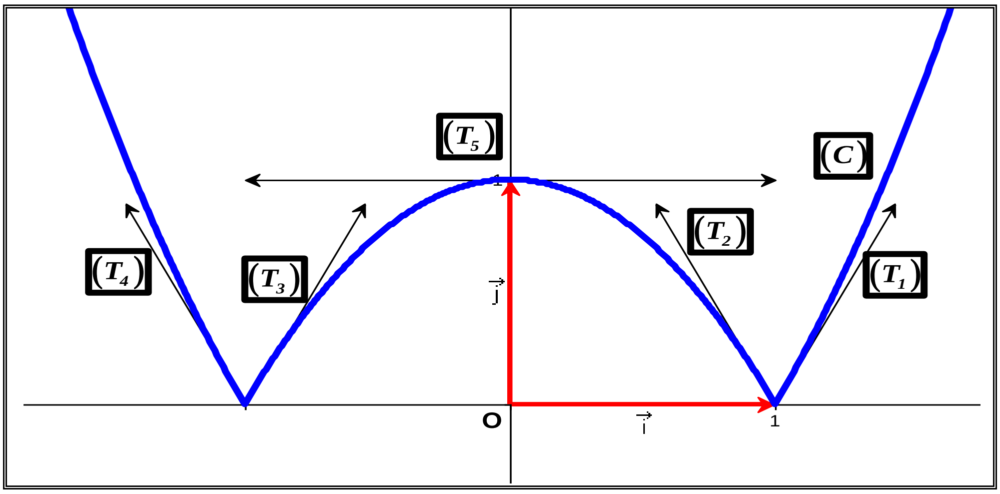
إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق في x_0 على اليمين، على التوالي (على اليسار) فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عند النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه هو $f'_d(x_0)$ على التوالي($f'_g(x_0)$).

تمرين05

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=|x^2-1|$.

1)– أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 1 على اليمين و على اليسار.

2)- أول النتيجتين هندسيا



خاصية

إذا كان $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ و $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty$

فإن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي في النقطة $A(x_0,f(x_0))$.

تمرين06

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي: $f(x)=\sqrt{x}$.

1)– أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في 0 على اليمين

2)- أعط تأويلا هندسيا لهذه النتيجة

III)- الدالة المشتقة لدالة عددية

1)- الاشتقاق على مجال

تعريف1

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال I، إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I.

تعريف2

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال $[a,b]$

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $[a,b]$، إذا كانت قابلة للاشتقاق على $]a,b[$ و قابلة للاشتقاق في a على اليمين و في b على اليسار

2)- الدالة المشتقة

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- الدالة المشتقة للدالة f هي الدالة التي نرمز لها بالرمز f' كما يلي:

$$f' : I \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f'(x)$$

تمرين07

نعتبر الدالة f المعرفة على مجال I و $x_0 \in I$

بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في x_0 وحدد الدالة f' في الحالات التالية :

1)- $f(x)=x^2$ ، $I=\mathbb{R}$

2)- $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$ ، $I=\mathbb{R}$

3)- $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $I=\mathbb{R}^*$

4)- $f(x)=\sqrt{x}$ ، $I=]0,+\infty[$

5)- $f(x)=\sin x$ ، $I=\mathbb{R}$

3)- الدالة المشتقة الثانية – المشتقات المتتالية

تعريف

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت الدالة f' قابلة للاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' .
- إذا كانت الدالة f'' قابلة للاشتقاق على المجال I فإن دالتها المشتقة على I تسمى الدالة المشتقة الثالثة للدالة f (أو المشتقة من الرتبة n) و نرمز لها بالرمز f''' أو $f^{(3)}$.

ملاحظة

- نرمز للدالة المشتقة من الرتبة n بالرمز $f^{(n)}$

تمرين08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي: $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

1)- بين أن f قابلة للاشتقاق مرتين على كل من المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$

2)- حدد الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

تمرين09

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

1)- حدد $f'(x)$ و $f''(x)$ و $f'''(x)$

2)- تظنن $f^{(n)}(x)$ حيث $f^{(n)}(x)$ هي المشتقة من الرتبة n $(n\geq 2)$ للدالة f .

3)- برهن على ذلك بالترجج.

4)- جدول الدوال المشقة لبعض الدوال الاعتيادية

الدالة f	مجموعة تعريف f	الدالة f'	f قابلة للاشتقاق على المجال
$x \mapsto a,(a\in\mathbb{R})$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto 0$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto 1$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto x^n, n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto nx^{n-1}$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto \frac{1}{x}$	$]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$	$x\mapsto -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$
$x\mapsto \sqrt{x}$	$[0,+\infty[$	$x\mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0,+\infty[$
$x\mapsto \sin x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto \cos x$	$]-\infty,+\infty[$	$x\mapsto -\sin x$	$]-\infty,+\infty[$
$x\mapsto \tan x$	$\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$	$x\mapsto 1+\tan^2 x$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$

تمرين10: النهايات و العدد المشتق

أحسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}}$ و $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$ و $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x-\sqrt{2}}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

5)- العمليات على الدوال المشتقة

خاصية

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I، و $\lambda\in\mathbb{R}$ فإن:
الدوال $f+g$ و λf و fg، دوال قابلة للاشتقاق على I و لدينا:
$(f+g)'=f'+g'$ و $(\lambda f)'=\lambda f'$ و $(fg)'=f'g+fg'$.
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I، و g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ دالتان قابلتان للاشتقاق على I ، و لدينا:
$\left(\frac{1}{g}\right)'=-\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.

نتيجة

- كل حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

تمرين11

أحسب $f'(x)$ في كل حالة من الحالات التالية:

1)- $f(x)=2x^3-3x+1$ 2)- $f(x)=x^2-4\sqrt{x}$ 3)- $f(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

6)- مشتقات الدوال: f^n و $f(ax+b)$ و $\sqrt{f}$

خاصية

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- الدالة f^n (حيث $n\in\mathbb{N}^*$) قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $(f^n)'=nf'f^{n-1}$
- إذا كان $\forall x\in I, f(x)\neq 0$ فإن الدالة f^n (حيث $n\in\mathbb{Z}^*$) قابلة للاشتقاق على I و لدينا: $\forall n\in\mathbb{N}^*, (f^n)'=nf'f^{n-1}$

مثال1

لندرس قابلية اشتقاق الدالة : $f:x\mapsto \dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$

بما أن $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+x+1\neq 0$ (لأن $\Delta<0$) فإن $D_f=\mathbb{R}$.

و بما أن f دالة جذرية فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\left((x^2+x+1)^{-3}\right)'=-3(x^2+x+1)^{-4}(x^2+x+1)'=\frac{-3(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

خاصية2

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I، و a و b عددين حقيقيين .

لتكن J مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $(ax+b)\in J$.

الدالة $g:x\mapsto f(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على المجال J و لدينا :

$\forall x\in J, g'(x)=af'(ax+b)$

مثال

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=\cos(2x+\pi)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=-2\sin(2x+\pi)$

خاصية3

إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق و موجبة قطعا على مجال I فإن الدالة $\sqrt{f}$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا : $\forall x\in I, (\sqrt{f})'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

مثال

لندرس قابلية اشتقاق الدالة : $f:x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}$

لدينا: الدالة $f:x\mapsto x^2-x+1$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (لأنها حدودية).

و لدينا $\Delta<0$ و $a>0$ إذن $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+1>0$، و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x)=\dfrac{(x^2-x+1)'}{2\sqrt{x^2-x+1}}=\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}$

III)- تطبيقات الدالة المشتقة

1)- رتابة دالة و إشارة دالتها المشتقة

خاصية1

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f تزايدية على المجال I فإن $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- إذا كانت f تناقصية على المجال I فإن $\forall x \in I, f'(x) \leq 0$
- إذا كانت f ثابتة على المجال I فإن $\forall x \in I, f'(x) = 0$

خاصية2

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f' موجبة قطعا على المجال I (ويمكن للدالة f' أن تنعدم في نقط منعزلة من I) فإن الدالة f تزايدية قطعا على المجال I.
- إذا كانت f' سالبة قطعا على المجال I (ويمكن للدالة f' أن تنعدم في نقط منعزلة من I) فإن الدالة f تناقصية قطعا على المجال I.
- إذا كانت f' منعدمة على المجال I ، فإن f ثابتة على المجال I.

مثال

- لندرس تغيرات الدالة $f : x \mapsto x^3 - 3x + 2$

لدينا : $D_f = \mathbb{R}$ (لأن f حدودية)

و بما أن f دالة حدودية فإنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(x^3 - 3x + 2\right)' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$$

إشارة f' و جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-1)$	↘	$f(1)$	↗	

ملاحظة:

- f' تنعدم في نقطتين منعزلتين هما 1 و -1.

- الدالة f تقبل قيمة قصوى عند -1 هي $f(-1)=4$
- الدالة f تقبل قيمة دنيا عند 1 هي $f(1)=0$

2)- مطاريف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية1

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $a\in I$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق في النقطة a و تقبل مطرافا عند a فإن $f'(a)=0$

ملاحظة

- إذا كان $f'(a)=0$ فهذا لا يعني بالضرورة أن $f(a)$ مطراف للدالة f

نأخذ مثلا : $f(x)=x^3$ و $a=0$

لدينا : $f'(x)=6x^2$ و بالتالي f' تنعدم في الصفر ، لكن :

$\forall x\in\mathbb{R}^+, f(x)\geq 0$ و $\forall x\in\mathbb{R}^-, f(x)\leq 0$ و منه $f(0)$ ليس مطرافا للدالة f

خاصية2

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و $a\in I$
- إذا كانت f' تنعدم في النقطة a و تتغير إشارتها فإن $f(a)$ مطرافا للدالة f

VI)- المعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$

تعريف

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم
- المعادلة $y''+\omega^2y=0$ ذات المجهول الدالة y حيث y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية.
- كل دالة f قابلة للاشتقاق مرتين على $\mathbb{R}$ و تحقق $f''(x)+\omega^2f(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$ تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$

خاصية

ليكن ω عددا حقيقيا غير منعدم
- الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2y=0$ هو مجموعة الدوال y المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $y:x\mapsto\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$ حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$

مثال

الحل العام للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$ هو الدوال $y:x\mapsto\alpha\cos 2x+\beta\sin x$ حيث $\alpha\in\mathbb{R}$ و $\beta\in\mathbb{R}$.

ملاحظة

يمكن تحويل الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية و كتابته على الشكل $y:x\mapsto k\cos(\omega x-\varphi)$ حيث $k\in\mathbb{R}$ و $\varphi\in\mathbb{R}$.

تمرين12

نعتبر المعادلة التفاضلية : $(E): y'' + 16y = 0$

1)- حدد الحل العام لهذه المعادلة التفاضلية

2)- حدد الحل الخاص f للمعادلة (E) الذي يحقق $f(0)=1$ و $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=1$