أكاديمية قاس - مكناس ثانوية عمر ابن الخطاب التأهيلية - مكناس-	فـــــرض محـــــــــروس قم 4 (2018-2017)	الثانية علوم رياضية أ مادة : الرياضيـــات ***Prof: Rahmouni***

التمرين: 01 **(07نقط)** **أسئلة هذا التمرين مستقلة فيما بينها.**

$\frac{1}{2}$

1) ليكن a و b عددين عقديين حيث $|a|=|b|=1$

أ- بين أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}=a\bar{b}+\bar{a}b+2$ — 1ن

ب-استنتج أن : $\frac{(a+b)^2}{ab}\in\mathbb{R}^+$ — 1ن

2) أ- بين أن : $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2 \quad |z|+|z'|\leq|z+z'|+|z-z'|$ — 1ن

ب- بين أن : $\forall(z;z')\in\mathbb{C}^2 \quad |z+z'|=|z|+|z'|\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}^+ \ z'=\lambda z$. — 1ن

3) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) التالية : $(E):\frac{z-i}{\bar{z}+i}=2i\left|\frac{z}{z+3i}\right|$ حيث $z\in\mathbb{C}$.

أ- بين أن : z حل للمعادلة (E) $\Leftrightarrow$ $|z+3i|=2|z|$ و $\frac{z-i}{\bar{z}+i}=i$ — 0.5ن

ب- بين أن المجموعة $(C)=\{M(z)\in(P)/|z+3i|=2|z|\}$ هي دائرة المطلوب تحديد مركزها و شعاعها. — 1ن

ج-حدد طبيعة المجموعة $(\Gamma)=\{M(z)\in(P)/\frac{z-i}{\bar{z}+i}=i\}$ — 1ن

د-استنتج عدد حلول المعادلة (E) ثم حددها. — 0.5ن

التمرين: 02 **(06 نقط)**

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u};\vec{v})$

نعتبر التطبيق g المعرف من $\mathbb{C}-\{i\}$ إلى $\mathbb{C}$ ب $g(z)=\frac{iz}{z-i}$

1) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $g(z)=\frac{i}{z}$ — 1ن

2) أ-بين أن : $g(z)\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|^2=\mathrm{Im}(z)$ — 0.5ن

ب-حدد مجموعة النقط $M(z)$ بحيث $g(z)\in i\mathbb{R}$ — 0.5ن

3) أ-بين أن المجموعة $C=\{M(z)/|g(z)-i|=2\}$ هي دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها — 1ن

ب-بين أن المجموعة $D=\{M(z)/\arg(g(z)-i)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\}$ هي نصف مستقيم محروم من النقطة $A(i)$ — 1ن

ج- حدد تقاطع المجموعتين C و D — 1ن

4) نضع $z=e^{i\theta}$ حيث $\theta\in[0.\pi[$ أكتب $g(z)$ على الشكل ألمثلثي

التمرين: 03 **(07 نقط)**

المستوى منسوب ل م م م $(O;\vec{u};\vec{v})$ نعتبر النقط $A(-1)$ و $B(1)$ و $C(i\sqrt{3})$ نرمز ب (C) للدائرة المحيطة بالمثلث ABC . ليكن $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ نضع $\varphi(z)=\frac{z-1}{z+1}$ و $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ و $M(z)$

الجزء الأول:

1) بين أن المثلث ABC متساوي الأضلاع . — 0.5ن

2) أعط الشكل ألمثلثي للعدد $\varphi(i\sqrt{3})$. — 0.5ن

3) ليكن $z\in\mathbb{C}\setminus\{-1;1\}$ بين أن : $j\varphi(z)\in\mathbb{R}_+^*\Leftrightarrow\overline{(\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB})}\equiv\frac{-2\pi}{3}[2\pi]$ — 1.5ن

الجزء الثاني :

1) بين أن : $(\forall u\in\mathbb{C}):|u|+1=|u+1|\Leftrightarrow u\in\mathbb{R}^+$ — 1ن

$\frac{2}{2}$

2) ليكن $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ نضع $z' = \varphi(z)$

أ-بين أن : $j(jz'+1) = \frac{i\sqrt{3}-z}{z+1}$ 1ن

ب- تحقق أنه إذا كانت $M(z)$ نقطة من المستوى حيث $M \neq A$ فان $|jz'+1| = \frac{MC}{MA}$ 0.5ن

ج- استنتج أن : $MA + MB = MC \Leftrightarrow |z'|+1 = |jz'+1|$ 1ن

3) استنتج طبيعة المجموعة $(\Gamma) = \{M \in (P) / MA + MB = MC\}$ 1ن

تمارين أضافية

التمرين 01:

1) بين أن : $|\sin t| \leq |t| \quad (\forall t \in \mathbb{R})$ 2ن

2) بين أن : $|e^{i\theta} - 1| \leq |\theta| \quad : \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$

3) استنتج أن : $|z - |z|| \leq |z||Argz| \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

التمرين 02 :

1) ليكن x و y و z من $\mathbb{R}$ بين أن : $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0 \Rightarrow e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$ 2ن

2) بسط المجموع : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$

التمرين 03 :

حدد على الشكل الجبري جميع الأعداد العقدية z بحيث : 2ن

$$\begin{cases} \arg(z-i) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \\ z\bar{z} - (1+i)\bar{z} - (1-i)z - 2 = 0 \end{cases}$$