

الصفحة
1 / 2

مباراة توظيف أساتذة التعليم الثانوي  
التاهيلي من الدرجة الثانية  
نونبر 2011  
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية  
والتعليم العالي  
والتكوين المهني  
والتكنولوجيا  
والمركز الوطني للتقويم والامتحانات

الاختبار:	موضوع حول مادة التدريس المطلوبة	المعامل:	3
التخصص:	الرياضيات	مدة الإنجاز:	ثلاث ساعات

**EXERCICE 1** : (4 points)

Soit  $ABC$  un triangle ayant tous ces angles aigus, soient  $L$  et  $N$  les intersections de la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{A}$  avec, respectivement  $(BC)$  et le cercle circonscrit à  $ABC$ . Soient  $K$  et  $M$  les projections orthogonales de  $L$  sur les cotés  $[AB]$  et  $[AC]$ .

- 1 a) Montrer que :  $Aire(AMNK) = \frac{1}{2} AN \cdot MK$
- 1 b) Montrer que les points  $A, K, L$  et  $M$  sont cocycliques, puis, en utilisant la loi des sinus, prouver que :  $KM = AL \cdot \sin \widehat{A}$
- 1 c) Montrer que les triangles  $ACL$  et  $ANB$  sont semblables en déduire que  $AB \cdot AC = AN \cdot AL$
- 1 d) calculer en fonction de  $AB, AC$  et  $\sin \widehat{A}$  l'aire du triangle  $ABC$ , en déduire que :  $Aire(AMNK) = Aire(ABC)$

**EXERCICE 2** : (5 points)

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes le polynôme suivant :

$$P(z) = z^3 - z^2 - (5 + 4i)z + 21 - 12i$$

- 1 1- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  sachant qu'elle admet une solution réelle.
- 2 - Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . Soient  $A, B$  et  $I$  les points d'affixes respectifs  $z_A = 3 + 2i, z_B = -3, z_I = 1 - 2i$ .
- 1 a) Calculer  $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$ , en déduire la nature du triangle  $IAB$ ,
- 0.5 b) Déterminer  $z_C$  l'affixe du point  $C$  image du point  $I$  par l'homothétie de centre  $A$  et de rapport 2.
- 0.5 c) déterminer  $z_D$  l'affixe du point  $D$  le barycentre du système pondéré  $\{(A; 1); (B; -1); (C; 1)\}$ ,
- 0.5 d) Déterminer la nature du quadrilatère  $ABCD$ .

0.75 3- Déterminer  $(\Gamma)$  l'ensemble des points  $M$  tel que :

$$\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = \frac{1}{2} \|\overline{MA} + \overline{MC}\|$$

0.75 4- Déterminer  $(C)$  l'ensemble des points  $M$  tel que :  $\|\overline{MA} - \overline{MB} + \overline{MC}\| = 4\sqrt{5}$

### EXERCICE 3 : (3 points)

On considère dans  $\mathbb{Z}$ , l'équation  $(E) : x^{2011} \equiv 2 \pmod{19}$

- 1 1- Trouver deux entiers naturels  $u$  et  $v$  tels que :  $2011u - 18v = 1$
- 2 2- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$ .

### EXERCICE 4 (8 points)

**Partie I :** On pose pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p}$

0.5 1- a) Montrer que :  $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \int_p^{p+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{p+1}$

0.5 b) En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) u_n \leq 1 + \ln(n)$

2- On considère la fonction  $\varphi_1$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par : 
$$\begin{cases} \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_1(x) = x(1 + \ln(x)) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

0.5 a) Montrer que  $\varphi_1$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

1.5 b) Etudier les variations de  $\varphi_1$  et tracer l'allure de la courbe représentative de  $\varphi_1$ . (On précisera la branche infinie et la demi-tangente au point d'abscisse 0)

**Partie II :** Pour tout réel  $x$  positif et pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t) dt \quad (\text{On rappelle que } \varphi_1 \text{ a été définie à la partie I)}$$

1.5 1- a) Montrer que, pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , la fonction  $\varphi_n$  est parfaitement définie et continue sur  $\mathbb{R}_+$ . Que vaut  $\varphi_n(0)$  ?

1.5 b) Vérifier qu'il existe deux suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\forall x \in \mathbb{R}_+) \varphi_n(x) = x^n (a_n + b_n \ln x)$$

$$(\text{On montrera que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} - \frac{b_n}{(n+1)^2} \text{ et } b_{n+1} = \frac{b_n}{n+1} )$$

0.5 c) Calculer  $b_n$

2- Pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :  $c_n = n! a_n$

0.5 a) Montrer que :  $c_n = 2 - u_n$

0.5 b) En déduire que, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2 :  $|c_n| \leq 1 + \ln(n)$

0.5 c) Conclure que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$