Exercice n°01 :(02 pts)

1)- Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel λ l'ensemble des solutions

1 Dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(E) : \dfrac{1}{1+x^{2017}} = \lambda$.

2)- Calculer chacune des limites suivantes :

2 $$(1) : \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[4]{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2(x)} \text{ et } (2) : \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\arctan\left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right) - \frac{\pi}{4}}{x} .$$

Exercice n°02 :(03 pts)

1 **1)-** Déterminer suivant les valeurs du paramètre λ ($\lambda \in]0,+\infty[$) le nombre De solutions de l'équation $(F) : x^3 - 3\lambda^2 x + 2 = 0$ dans l'intervalle $]0,2\lambda[$.

1,5 **2)-** Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel λ le nombre de solutions de l'équation $(G) : x^3 - 3\lambda x^2 - 3x + \lambda = 0$ dans l'intervalle $]0,1[$.

Exercice n°03 :(04 pts)

⇨ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arctan(x-1) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

0,5 **1)-** Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

0,75 **2)-** La fonction f admet-elle un prolongement par continuité en $x_0 = 0$?

1 **3)-** Déterminer $f(]0,+\infty[)$ et $f(]-\infty,0[)$.

0,75 **4)-** Démontrer que l'équation $(H) : f(x) = \arctan\left(\dfrac{19}{8}\right)$ admet une Solution unique appartenant à intervalle $]1,+\infty[$.

1 **5)-** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (H) .

Exercice n°04 :(04 pts)

⇨ On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty,0]$ par :

$$(\forall x \in I), f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 1} .$$

1 **1)-** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera .

0,5 — **2)-** Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

⇨ Soit g la fonction définie sur $K = \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ et } \left(\forall x \in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right), g(x) = \frac{1}{f^{-1}(\cos(2x))}.$$

0,75 — **3)-** Montrer que g est continue sur K .

0,75 — **4)-** Montrer que : $(\forall x \in K), g(x) = \dfrac{\sin(2x)}{\sin(2x)-1}$.

1 — **5)-** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle L qu'on déterminera .

Exercice n°05 :(05 pts)

⇨ On considère la fonction f définie sur $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$(\forall x \in I), f(x) = \frac{1}{2\cos(x)}.$$

0,5 — **1)-** Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera .

1 — **2)-** Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in J$.

3)- Soit g la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $g(x) = \sin(x) - 2\cos^2(x)$

0,5 — **a)-** Dresser le tableau de variation de g .

0,75 — **b)-** Montrer que l'équation $(E_1) : g(x) = 0$ admet une solution unique α Dans l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que : $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$.

0,5 — **4)-** Déduire le signe g de sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

5)- Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = f(x) - x$.

0,75 — **a)-** Dresser le tableau de variation de h , puis montrer que : $h(\alpha) < 0$.

1 — **b)-** Montrer que l'équation $(E_2) : h(x) = 0$ admet exactement deux Solutions r_1 et r_2 tels que : $\frac{\pi}{6} < r_1 < \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{3} < r_2 < \frac{5\pi}{12}$.

1 — **6)-** Construire (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormé .

Exercices Bonus :

Exercice n°01 :

2

1

1)- Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction injective et continue sur $\mathbb{R}$.

- ✓ Prouver que f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

2)- Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction tel que : $(\forall x\in\mathbb{R}), g\circ g(x)=-x$.

- ✓ Montrer que g ne peut pas être continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°02 :

2

- ✓ Montrer que la fonction $f : x\mapsto sin(x)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Fin du sujet

Bon courage et bonne Chance