Durée : 4 heures

Exercice 01 : (05 points)

⇨ Dans le système décimal , on considère l'entier naturel :

$$a_n = \underbrace{11....11}_{n\ fois} \text{ , avec } n \in \mathbb{N}^* .$$

0,5 **1)-** Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \equiv 1[2]$ et $a_n \equiv 1[5]$.

0,75 **2)-** Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel non nul n , tel que : $a_n \equiv 0[3]$.

3)- Soit $p > 5$ un nombre premier .

0,75 ✓ Montrer en utilisant le théorème de Fermat que : $a_{p-1} \equiv 0[p]$.

0,5 **4)- a)-** Vérifier que : $\left(\forall (m,n) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2\right), m > n \Rightarrow a_m - a_n = 10^n . a_{m-n}$.

b)- Soit $q \geq 2$ un entier naturel tel que : $q \wedge 10 = 1$.

1 ✓ Montrer que : $\left(\exists n \in \mathbb{N}^*\right), a_n \equiv 0[q]$.

1,5 **5)-** Quels sont les entiers naturels non nuls qui admet au moins un multiple s'écrivant dans le système décimal sous la forme a_n ?

Exercice 02 : (05 points)

⇨ Les parties I et II sont indépendantes et $\theta \in \left]0, \frac{3\pi}{4}\right[$.

I- Soient z_1 et z_2 les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

$$(E) : z^2 + 2i.z - 1 + ie^{2i\theta} = 0 .$$

0,75 **1)-** Sans résoudre l'équation (E) , montrer que :

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta + \frac{3\pi}{4}[2\pi] .$$

0,75 **2)-** Déterminer la valeur de θ pour laquelle $1-i$ est solution de (E) , puis écrire Dans ce cas les solutions de (E) sous forme trigonométrique .

1 **3)-** Déterminer en fonction de θ les solutions de l'équation (E) .

Durée : 4 heures

II- $ABCD$ est un trapèze isocèle dont les bases sont $[BC]$ et $[AD]$. On considère La rotation R de centre C et d'angle θ et on pose : $A' = R(A)$ et $B' = R(B)$.
Les points I , J et K sont les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[A'D]$ et $[B'C]$. On munit le plan complexe du repère $(I, \vec{u}, \vec{v})$ tels que : $aff(C) = a$ et $aff(D) = b + ic$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

0,75 **1)-** Vérifier que : $aff(B) = -a$ et $aff(A) = -b + ic$.

0,75 **2)-** Montrer que : $aff(A') = a\left(1 - e^{i\theta}\right) + (-b + ic)e^{i\theta}$ et $aff(B') = a\left(1 - 2e^{i\theta}\right)$.

1 **3)-** Prouver que : $\dfrac{z_J - z_I}{z_K - z_I} = \dfrac{a+b}{2a} + \dfrac{ic}{2a} \times \dfrac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}}$, puis en déduire que les points I , J et K sont alignés .

Exercice 03 : (05 points)

⇨ On rappel que $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}), +, \times\right)$ est un anneau unitaire et que $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$ est un espace vectoriel réel .

I- On pose : $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ -b & a-b \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,5 **1)-** Montrer que $(E, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}), +, \cdot\right)$.

2)- On pose : $I = M(1,0)$ et $J = M(0,1)$.

0,5 ✓ Montrer que (I, J) est une base de $(E, +, \cdot)$, puis en déduire $\dim(E)$.

0,75 **3)-** Montrer que : $\left(\forall k \in \mathbb{N}^*\right), J^k = (-3)^k . I$, puis en déduire les cordonnées de La matrice $S_n = I + J + J^2 + ... + J^{2n}$ dans la base (I, J) où $n \in \mathbb{N}^*$.

4)- a)- Montrer que :

0,5 $$\left(\forall (a,b,x,y) \in \mathbb{R}^4\right), M(a,b) \times M(x,y) = M(ax - 3ay, ay + bx) .$$

0,25 **b)-** En déduire E que est stable dans $\left(\mathrm{IM}_2(\mathbb{R}), \times\right)$.

Durée : 4 heures

0,5	**5)- a)-** Montrer que $\left(1, i\sqrt{3}\right)$ une base de l'espace vectoriel réel $(\mathbb{C},+,\cdot)$.
	b)- Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on pose : $f\left(a+ib\sqrt{3}\right)=M(a,b)$.
0,75	✓ Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C},\times)$ vers $(E,\times)$, puis en déduire La structure de $(E^*,\times)$ ou $E^*=E-\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$.
0,5	**6)-** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif .
	7)- On considère la matrice $A=\frac{1}{2}.(I+J)$.
0,75	✓ Déterminer tous le entiers naturels p tel que : $A^p=I$.

Exercice 04 : (03 points)

	I- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $$(\forall x\in\mathbb{R}),f(x)=Arc\tan\left(e^{-(x+1)}\right).$$
0,5	**1)- a)-** Calculer $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
0,5	**b)-** Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}),f'(x)=\frac{-e^{-(x+1)}}{1+e^{-2(x+1)}}$, puis en déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
0,5	**2)-** Montrer que l'équation : $(E):f(x)=x$ admet une solution unique a dans $\mathbb{R}$ et que : $a\in\left]0,1\right[$.
	II- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $$u_0=0 \text{ et } (\forall n\in\mathbb{N}),u_{n+1}=f(u_n).$$
0,25	**1)- a)-** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),0\le u_n\le 1$.
0,5	**b)-** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\left\|u_{n+1}-a\right\|\le\frac{1}{e}.\left\|u_n-a\right\|$.
0,25	**c)-** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente en précisant sa limite .
	2)- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}u_k$.
0,5	✓ Justifier soigneusement que : $\lim_{n\to+\infty}S_n=a$.

Durée : 4 heures

Exercice 05 : (12 points)

	I- On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $$(\forall x\in\mathbb{R}),u(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$
0,25	**1)- a)-** Montrer que la fonction u est impaire .
0,5	**b)-** Calculer $\lim_{x\to+\infty}u(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .
0,25	**2)- a)-** Montrer que u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
0,25	**b)-** Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_u) au point d'abscisse 0 .
0,5	**3)-** Montrer que u admet une bijection réciproque de u^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera .
1	**4)- a)-** Tracer dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes (C_u) et $(C_{u^{-1}})$.
0,5	**b)-** Calculer en cm^2 la surface du secteur (Δ) tel que : $$(\Delta)=\left\{M(x,y)\in(\mathrm{P})/(x,y)\in[0,\ln 2]^2 \text{ et } u(x)\le y\le u^{-1}(x)\right\}.$$
	II- Soit f fonction numérique définie par : $$f(0)=1 \text{ et } f(x)=\frac{2x}{x+u(x)},x\ne 0.$$
0,5	**1)- a)-** Justifier que : $D_f=\mathbb{R}$, puis calculer $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
0,5	**b)-** Montrer que la fonction f est paire , puis déduire $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.
0,5	**2)-** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
0,5	**3)- a)-** Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}^+),u'(t)=1-(u(t))^2$, puis en déduire que : $$(\forall x\in\mathbb{R}^+),x-\frac{x^3}{3}\le u(x)\le x.$$
0,5	**b)-** Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}),\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{x-u(x)}{2x^2}.f(x)$, puis en déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=0$.

Durée : 4 heures

0,5	**4)- a)-** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), f'(x)=2.\frac{u(x)-x.u'(x)}{\left(x+u(x)\right)^2}.$$
0,5	**b)-** En utilisant le théorème des accroissement finis , montrer que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), u(x)-x.u'(x)>0 .$$
0,5	**c)-** Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+}$, puis déterminer $f(\mathbb{R})$.
	III- Soit F la fonction numérique définie par : $$F(0)=0 \text{ et } F(x)=\frac{1}{x}.\int_0^x \ln\left(f(t)\right)dt, x\neq 0 .$$
0,25	**1)- a)-** Justifier soigneusement que : $D_F=\mathbb{R}$.
0,25	**b)-** Montrer que est paire (Utiliser une intégration par changement de variable) .
0,25	**2)- a)-** En utilisant le théorème de la moyenne , montrer que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*}\right), 0\leq F(x)\leq \ln\left(f(x)\right).$$
0,25	**b)-** En déduire que F est continue en 0 .
0,5	**c)-** Montrer que F est dérivable à droite en 0 et donner $F'_d(0)$.
0,5	**3)- a)-** Vérifier que : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}\right), \frac{2.t}{1+t}\leq f(t)\leq 2$.
0,5	**b)-** En déduire que , pour tout $x\in[1,+\infty[$, on a : $$\frac{1}{x}.\left(\int_0^1 \ln\left(f(t)\right)dt+\int_1^x \ln\left(\frac{2.t}{1+t}\right)dt\right)\leq F(x)\leq \ln 2 .$$
0,25	**c)-** Montrer que : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right), \int_1^x \ln\left(\frac{2.t}{1+t}\right)dt=(x+1).\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)-\ln x$.
0,25	**d)-** En déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .
0,5	**4)- a)-** Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), F'(x)=\frac{\ln\left(f(x)\right)-F(x)}{x}.$$
0,25	**b)-** Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Fin Du Sujet .