ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 01	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية 2014/2013	مدة الإنجاز : أربع ساعات
		ذ : عبدالله بن الختير

■ **التمرين رقم 01:** (02 نقط)

⇦ لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n=(1006)^n+(1007)^n$.

0,5 **1)**- أ- حدد تبعا لقيم n من $\mathbb{N}^*$ ، باقي القسمة الأقليدية ل 2^n على 5 .

0,25 ب- إستنتج باقي القسمة الأقليدية ل u_{2013} على 5 .

0,5 **2)**- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n\equiv 1+(-1)^n[3]$.

0,25 ب- إستنتج أن u_{u_n} يقبل القسمة على 3 لكل n من $\mathbb{N}^*$.

0,5 **3)**- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_{2n+1}\equiv 0[2013]$.

■ **التمرين رقم 02:** (3,5 نقطة)

I-**1)**- ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $a\wedge b=1$ و $ab=c^3$ ، حيث $c\in\mathbb{N}^*$.

0,5 ▪ بين أنه : $(\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*);\begin{cases}a=\alpha^3\\ b=\beta^3\end{cases}$.

0,5 **2)**- أثبت أنه : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n+1}\notin\mathbb{Q}$ (يمكنك الإستدلال بالخلف و إستعمال I-**1)**-) .

II- ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث : $a^3=1+3b^3$.

0,25 **1)**- بين أن : $a\wedge b=1$.

0,75 **2)**- أ- بين أن : $a\equiv 1[3]$ و أن $(a-1)\wedge(a^2+a+1)=3$.

0,75 ب- إستنتج أن $a-1$ أو a^2+a+1 يقبل القسمة على 3 و لا يقبل القسمة على 9 .

4)- نفترض أن $a-1$ يقبل القسمة على 3 ولا يقبل القسمة على 9 .

0,5 أ- بين أن : $\left(\frac{a-1}{3}\right)\wedge(a^2+a+1)=1$.

0,25 ب- إستنتج أن $\sqrt[3]{\frac{a-1}{3}}$ و $\sqrt[3]{a^2+a+1}$ عددان صحيحان طبيعيان يقسمان b .

■ **التمرين رقم 03:** (03 نقط)

1)- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة :

0,5 $(E): z^2-iz(1-\cos\theta e^{i\theta})+\cos\theta e^{i\theta}=0$ ، حيث $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

2)- في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط :

$A(i)$ و $B\left(\frac{i}{4}\right)$ و $M\left(\frac{1}{i+\tan\theta}\right)$ والنقطة N هي منتصف القطعة $[AM]$.

abouzakariyamaths@gmail.com

أ- بين أن : $z_N = \frac{1}{4}\left[\sin(2\theta) + 2i\sin^2\theta\right]$. 0,5

ب- اثبت أنه عندما يتغير θ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ، النقطة N تتغير على الدائرة (Γ) التي مركزها $B\left(\frac{i}{4}\right)$ وشعاعها $R=\frac{1}{4}$ (محرومة من نقطة ينبغي تحديدها) . 0,5

ج- إستنتج المحل الهندسي للنقطة M (لما يتغير θ على المجال $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$) . 0,5

د- أكتب z_M على الشكل الأسي . 0,5

ه- أعط طريقة هندسية لإنشاء النقطة $M_0\left(\frac{1}{i+\tan\left(7\pi/8\right)}\right)$ (بالمسطرة و البركار) . 0,5

■ **التمرين رقم 04:** (3,25 نقطة)

⇦ في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر الدوران R_n الذي مركزه $B(1)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2^n}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

1)- اعط الكتابة العقدية للدوران R_n . 0,25

2)- لكل نقطة M من (P) ، نضع : $M_n = R_n(M)$.

أ- بين أن : $(R_{n+1})^{-1}(M_n) = R_{n+1}(M)$. 0,5

ب- إستنتج أن : $M_nM_{n+1} = MM_{n+1}$. 0,25

3)- بين أنه لكل نقطة M من (P) مختلفة عن B ، لدينا : $M_nM_{n+1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)\times BM$ و $\left(\overline{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{M_nM_{n+1}}}\right) \equiv \frac{3\pi}{2^{n+2}} - \frac{\pi}{2}[2\pi]$. 1

4)- لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n = \sum_{k=1}^{n} OO_{k+1}$.

أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\right); \frac{x}{2}\le \sin x \le x$. 0,5

ب- بين أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أن نهايتها L تحقق $\frac{\pi}{4}\le L\le\frac{\pi}{2}$. 0,75

■ **التمرين رقم 05:** (03 نقط)

⇦ لتكن F الدالة المعرفة بما يلي : $F(x) = \int_0^{\ln x} \frac{e^t}{(1+t)^2}dt$.

1)- بين أن $D_F = \left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ (معللا جوابك) . 0,25

2)- بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e},1\right]\right); F(x)\le x\left(1-\frac{1}{1+\ln x}\right)$ ، ثم إستنتج $\lim_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+} F(x)$. 0,5

abouzakariyamaths@gmail.com

3)- أ- بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right);F(x)=\frac{x}{(1+\ln x)^2}-1+2\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{(1+t)^3}dt$.	0,5
ب- إستنتج أن : $(\forall x\in[1,+\infty[);F(x)\geq\frac{x}{(1+\ln x)^2}-1$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}F(x)$.	0,5
4)- أ- بين أن الدالة F تقابل من المجال $I=\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$ نحو $\mathbb{R}$.	0,5
ب- إستنتج أنه : $(\forall n\in\mathbb{N})\left(\exists!\alpha_n\in\left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right);F(\alpha_n)=-n$.	0,25
ج- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و أحسب نهايتها .	0,5

■ **التمرين رقم 06: (5,25 نقطة)**

▪ **الجزء الأول: (1,75 نقطة)**

1)- ضع جدول تغيرات الدالة : $f:t\mapsto e^{2t}-2e^t$ على $\mathbb{R}^+$.	0,5
2)- أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن : $(\forall t>0);0<\frac{f(t)+1}{t}<f'(t)$.	0,5
ب- إستنتج أن : $(\forall t>0);tf'(t)-f(t)>1$.	0,25
ج- بين أن الدالة : $g:t\mapsto\frac{f(t)}{t}$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^{*+}$.	0,5

▪ **الجزء الثاني : (3,5 نقطة)**

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt \text{ و } F(0)=-\ln 2 .$$

1)- أ- بين أن : $(\forall x>0);0\leq F(x)+\ln 2\leq f(2x)-f(x)$.	0,5
ب- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة F على اليمين في الصفر .	0,75
2)- أ- بين أن : $(\forall x>0);F(x)\geq f(x)\times\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$.	0,25
ب- إستنتج النهايتين : $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}$ ، ثم اعط تأويلهما الهندسي .	0,75
3)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F'(x)=\frac{f(2x)-f(x)}{x}$.	0,5
ب- إستنتج رتابة F و ضع جدول تغيراتها .	0,25
4)- أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.	0,5

abouzakariyamaths@gmail.com

■ **تمرين إضافي** : (02 نقط)

⇦ نعتبر العددين : $a=\sum_{k=0}^{9}(2011)^k$ و $N=\sum_{k=0}^{2009}(2011)^k$.

0,75	**1**)- أ- بين أن : $a\equiv 60[100]$.
0,25	ب- إستنتج أن a^p يقبل القسمة على 100 لكل p من $\mathbb{N}^*-\{1\}$.
0,75	**2**)- أ- بين أن : $N\equiv 201a[100]$.
0,25	ب- إستنتج رقمي وحدات و عشرات العدد N .

إنتهى الموضوع .

تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

Bon courage et bonne chance

abouzakariyamaths@gmail.com