فضاء الرياضيات بالثانوي	المتتاليات العددية	المستوى الدراسي: 1 باك.علوم.
	Les suites numériques	عدد الساعات : 14 ساعة

القدرات المستهدفة

❖ توظيف الاستدلال بالترجع. ❖ التمكن من دراسة متتالية عددية. ❖ التعرف على متتالية حسابية أو هندسية و تحديد أساسها و حدها الأول.	❖ حساب n حد متتابعة من متتالية حسابية أو هندسية. ❖ التعرف على وضعيات لمتتالية حسابية أو هندسية. ❖ استعمال المتتاليات الحسابية و الهندسية في حل مسائل

أهداف الدرس

❖ تعرف متتالية عددية(ترميز- تحديد حدود متتالية). ❖ تعرف متتالية ترجعية و توظيف الاستدلال بالترجع. ❖ دراسة متتالية مكبورة ، مصغورة ، محدودة. ❖ تحديد رتابة متتالية. ❖ تعرف متتالية حسابية و تحديد أساسها و حدها الأول.	❖ تحديد مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية. ❖ تعرف متتالية هندسية و تحديد أساسها و حدها الأول. ❖ تحديد مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية. ❖ تعرف وضعيات لمتتاليات حسابية و هندسية. ❖ توظيف المتتاليات الهندسية و الحسابية في حل مسائل.

I)-عموميات حول المتتاليات العددية: Généralités sur les suites numériques

ليكن n_0 عددا صحيحا طبيعيا معلوما. نعتبر الجزء I من $\mathbb{N}$ بحيث $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$.

1)- تعاريف- اصطلاحات و رموز

تعريف

كل دالة عددية u معرفة على المجموعة I تسمى متتالية عددية.

اصطلاحات لتكن u متتالية عددية معرفة على I .

▪ لكل n من I ، نرمز لـ $u(n)$ بالرمز u_n . ▪ العدد u_n يسمى الحد العام للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ ▪ إذا كان $I=\mathbb{N}$ ، نرمز للمتتالية ب: (u_n) أو $(u_n)_n$	▪ نرمز للمتتالية بالرمز $(u_n)_{n\in I}$ أو $(u_n)_{n\geq n_0}$. ▪ العدد u_{n_0} يسمى الحد الأول للمتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$. ▪ إذا كان $I=\mathbb{N}^*$ ، نرمز للمتتالية ب: $(u_n)_{n\geq 1}$

أمثلة

▪ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=2n^2+1$.

لدينا: $u_0=1$ ، $u_1=3$ ، $u_2=9$ ، ... ، $u_{100}=2\times 100^{2}+1$.

▪ نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $\forall\in\mathbb{N}^*, v_n=\dfrac{2}{n}+1$.

لدينا: $v_1=3$ ، $v_2=2$ ، $v_{10}=\dfrac{1}{5}$.

▪ نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بما يلي: $w_0=1$ و $w_{n+1}=2w_n+1, \forall n\in\mathbb{N}$.

لدينا: $w_0=1$ ، $w_1=3$ ، $w_2=7$ .....

▪ نعتبر المتتالية $(s_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي: $s_1=1$ و $s_{n+1}=\dfrac{s_n}{1+s_n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

لدينا: $s_1=1$ ، $s_2=\dfrac{1}{2}$ ، $s_3=\dfrac{1}{3}$ ......

ملاحظة

▪ المتتاليتان (u_n) و $(v_n)_{n\geq 1}$ معرفتان بصيغة صريحة.

▪ المتتاليتان (w_n) و $(s_n)_{n\geq 1}$ معرفتان بصيغة ترجعية.

تمرين01

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 2$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

1)- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(u_n)_n$.

2)- بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.

تمرين02

نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_n$ المعرفة بما يلي: $v_0 = 1$ و $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n + 1$.

1)- أحسب الحدود الأربعة الأولى للمتتالية $(v_n)_n$.

2)- بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} - 1$.

2)- المتتالية المكبورة- المتتالية المصغورة – المتتالية المحدودة: Suite majorée – minorée –bornée

تعريف

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in I, u_n \le M$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in I, u_n \ge m$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in I, m \le u_n \le M$.

مثال

نعتبر المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$.

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \ge 0$ أي أن المتتالية $(u_n)_n$ مصغورة بالعدد 0.

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \le 1$) لأن $n+1 \le n+2$ (أي أن المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة بالعدد 1.

بما أن المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة و مصغورة فإنها محدودة.

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ محدودة $\exists M \in \mathbb{R}^+ / \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \le M$.

تمرين03

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي: $u_0 = \dfrac{1}{4}$ و $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{2}u_n$.

- بين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \le \dfrac{1}{4}$

3)- رتابة متتالية: monotonie d'une suite

تعريف

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية على التوالي (تزايدية قطعا) $\Leftrightarrow (u_n \succ u_m)$ $\forall (n,m) \in I^2, n \succ m \Rightarrow u_n \ge u_m$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية على التوالي (تناقصية قطعا) $\Leftrightarrow (u_n \prec u_m)$ $\forall (n,m) \in I^2, n \succ m \Rightarrow u_n \le u_m$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall (n,m) \in I^2, u_n = u_m$.

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية.

- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية على التوالي(تزايدية قطعا) $\Leftrightarrow \left(u_{n+1} \succ u_n\right)$ $\forall n\in I, u_{n+1}\geq u_n$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية على التوالي(تناقصية قطعا) $\Leftrightarrow \left(u_{n+1} \prec u_n\right)$ $\forall n\in I, u_{n+1}\leq u_n$.
- المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة $\Leftrightarrow \forall n\in I, u_{n+1}=u_n$.

تمرين03

- لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n\in \mathbb{N}, u_n=n^2+n$.

بدراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$، بين أن المتتالية u_n تزايدية قطعا.

تمرين04

لتكن v_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $v_0=0$ و $\forall n\in \mathbb{N}, v_{n+1}=\sqrt{2u_n+1}$.

1)- بين بالترجع أن: $\forall n\in \mathbb{N}, v_n\geq 0$.

2)- بين بالترجع أن: $\forall n\in \mathbb{N}, v_{n+1}\geq v_n$.

تمرين05

لتكن (t_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $t_0=2$ و $\forall n\in \mathbb{N}, t_{n+1}=\dfrac{t_n}{1+t_n^2}$.

1)- بين بالترجع أن: $\forall n\in \mathbb{N}, t_n\geq 0$.

2)- بين أن $\forall n\in \mathbb{N}, \dfrac{t_{n+1}}{t_n}\leq 1$ ثم استنتج رتابة المتتالية (t_n).

تمرين06

نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$.

1)-أ-أدرس تغيرات الدالة f ثم أنشئ منحناها (C_f).

ب- حدد إشارة الفرق $f(x)-x$. (الوضع النسبي ل (C_f) و المنصف الأول للمعلم).

2)- لتكن (s_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $s_0=\dfrac{-1}{2}$ و $\forall n\in \mathbb{N}, s_{n+1}=f(s_n)$.

أ-تظنن رتابة المتتالية (s_n) من خلال منحنى الدالة f ثم برهن على ذلك.

ب- بين أن: $\forall n\in \mathbb{N}, \dfrac{-1}{2}\leq s_n\leq 0$.

3)- بين بالترجع أن: $\forall n\in \mathbb{N}, s_n=\dfrac{-1}{n+2}$

ملاحظة

لتحديد رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ نستعمل إحدى الطرق التالية:

- دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ حيث $n\in I$.
- استعمال البرهان بالترجع.
- مقارنة الخارج $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ مع العدد 1 حيث $n\in I$ إذا كان لجميع حدود المتتالية نفس الإشارة.
- دراسة إشارة الفرق $f(x)-x$ في حالة المتتالية من النوع $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث $n\in I$.

II)- المتتالية الحسابية: Suite arithmétique

تعريف

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية إذا وجد عدد حقيقي r بحيث: $\forall n\geq n_0, u_{n+1}-u_n=r$.

العدد الحقيقي r يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ و الحد u_{n_0} هو حدها الأول.

ملاحظة

للمرور من حد u_k إلى الحد u_{k+1} يتم إضافة الأساس r.

مثال

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=-3n+2$.

بين أن المتتالية (u_n) حسابية ثم حدد أساسها و حدها الأول.

خاصيات

❖ صيغة الحد العام لمتتالية حسابية: formule du terme général d'une suite arithmétique

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_{n_0} فإن: $\forall n\geq n_0, u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$

برهان

- من أجل $n=n_0$ ، لدينا: $u_{n_0}=u_{n_0}+(n_0-n_0)r$.
- نفترض أن $u_n=u_{n_0}+(n-n_0)r$ ، لنبين أن: $u_{n+1}=u_{n_0}+(n+1-n_0)r$.

  لدينا: $u_{n+1}=u_n+r=u_{n_0}+(n-n_0)r+r=u_{n_0}+(n+1-n_0)r$.

❖ **نتائج:**

- إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_{n_0} فإن: $\forall n\geq n_0, \forall p\geq n_0, u_n=u_p+(n-p)r$.
- إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 فإن: $\forall n\geq 0, u_n=u_0+nr$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_1 فإن: $\forall n\geq 1, u_n=u_1+(n-1)r$.

مثال

- ○ (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=10$ ، أحسب u_5 و u_{10} و u_{2007} .
- ○ (u_n) متتالية حسابية أساسها $r=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_1=10$ ، أحسب u_5 و u_{10} و u_{2007} .

- **تمرين07**

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=0$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{u_n-1}{u_n+3}$.

1)- بين أن: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\neq -1$.

2)- نضع: $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=\frac{1}{u_n+1}$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) حسابية ثم حدد أساسها و حدها الأول.

ب- أحسب v_n ثم استنتج u_n بدلالة n.

❖ صيغة ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية

تكون الأعداد الحقيقية a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $b=\frac{a+c}{2}$

برهان $b=a+r$ و $b=c-r$ ومنه $2b=a+c$ وبالتالي $b=\frac{a+c}{2}$.

▪ **تمرين08**

➢ حدد الأعداد الحقيقية a و b و c علما أنها حدود متتابعة لمتتالية حسابية و تحقق: $\begin{cases} a+b+c=39 \\ a^2+b^2+c^2=525 \end{cases}$.

➢ أحسب أساس هذه المتتالية.

❖ **مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية**

خاصية

> لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية حسابية.
> نعتبر المجموع $S=u_p+u_{p+1}+...+u_n$ حيث $n\geq p\geq n_0$.
> لدينا: $S=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$.

برهان

لدينا: $S=u_p+u_{p+1}+...+u_n$ و $S=u_n+u_{n-1}+...+u_p$

إذن: $2S=(u_p+u_n)+(u_{p+1}+u_{n-1})+...+(u_{p+k}+u_{n-k})+...+(u_n+u_p)$

و لدينا: $u_{p+k}+u_{n-k}=u_p+kr+u_p+(n-k-p)r=u_p+u_n$

إذن: $2S=(n-p+1)(u_p+u_n)$ و منه $S=\frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$.

ملاحظة

- العدد $n-p+1$ هو عدد حدود المجموع.
- الحد u_p هو الحد الأول من المجموع S.
- الحد u_n هو الحد الأخير من المجموع S.

❖ **حالات خاصة**

إذا كانت u_n متتالية حسابية فإن:

- $S=u_0+u_1+...+u_n=\frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.
- $S=u_1+u_2+...+u_n=\frac{n(u_0+u_n)}{2}$.

أمثلة

- أحسب بدلالة n المجموع: $s_n=1+2+3+...+n$.
- أحسب المجموع: $s_{99}=1+3+5+...+99$
- متتالية حسابية أساسها r و حدها الأول u_0 بحيث: $u_8=12$ و $u_5=3$. أحسب $S=u_1+u_2+...+u_{10}$

تمرين09

(u_n) متتالية حسابية بحيث: $S=u_3+u_4+...+u_{10}=168$ و $u_6=5$.

حدد أساسها r وحدها الأول u_0.

III)- المتتالية الهندسية Suite géométrique

تعريف

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية إذا وجد عدد حقيقي q بحيث: $\forall n\geq n_0 , u_{n+1}=qu_n$.
العدد الحقيقي q يسمى أساس المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ و الحد u_{n_0} هو حدها الأول.

ملاحظات

- للمرور من حد u_k إلى الحد u_{k+1} يتم ضربه في الأساس q.
- إذا كان الحد الأول $u_{n_0}=0$ فإن $\forall n\geq n_0 , u_n=0$.
- إذا كان الأساس $q=0$ فإن $\forall n> n_0 , u_n=0$.
- إذا كان الأساس $q=1$ فإن $\forall n\geq n_0 , u_n=u_{n_0}$.

مثال بين أن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $\forall n\in \mathbb{N}, u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ هندسية ثم حدد أساسها و حدها الأول.

خاصيات

❖ صيغة الحد العام لمتتالية هندسية: Formule du terme général d'une suite géométrique

إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير المنعدم وحدها الأول u_{n_0} فإن:
$\forall n\geq n_0 , u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$

برهان

- من أجل $n=n_0$ ، لدينا: $u_{n_0}=u_{n_0}q^{n_0-n_0}$.
- نفترض أن $u_n=u_{n_0}q^{n-n_0}$

لدينا: $u_{n+1}=u_nq=u_{n_0}q^{n-n_0}q=u_{n_0}q^{n+1-n_0}$.

❖ **نتائج**

- إذا كانت $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول u_{n_0} فإن: $\forall n\geq n_0 , \forall p\geq n_0 , u_n=u_pq^{n-p}$.
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول u_0 فإن: $\forall n\geq 0 , u_n=u_0q^n$.
- إذا كانت $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها q و حدها الأول u_1 فإن: $\forall n\geq 1 , u_n=u_1q^{n-1}$.

مثال

- ○ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ وحدها الأول $u_0=9$ ، أحسب u_5 و u_{10} و u_{2007}.
- ○ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_1=10$ ، أحسب u_5 و u_{10} و u_{2007}.

تمرين10

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0=3$ و $\forall n\in \mathbb{N}, u_{n+1}=3-\frac{2}{u_n}$.

1) – بين أن: $\forall n\in \mathbb{N}, u_n\neq 2$

2) – نضع: $\forall n\in \mathbb{N}, v_n=\frac{u_n-1}{u_n-2}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول .

ب- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n .

❖ صيغة ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية

خاصية

تكون الأعداد الحقيقية a و b و c في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابع لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $b^2=ac$

برهان

$b=aq$ و $c=bq$ و منه $b^2=ac$

تمرين11

(u_n) متتالية هندسية غير ثابتة بحيث: $u_0=5$ و $2u_2=3u_1-u_0$.

حدد بدلالة n الحد العام لهذه المتتالية.

❖ صيغة مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية

خاصية

لتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتالية هندسية أساسها q غير منعدم. نضع: $s=u_p+u_{p+1}+...+u_n$ حيث $n>p\geq n_0$

- إذا كان $q=1$ فإن: $s=(n-p+1)u_p$.
- إذا كان $q\neq 1$ فإن: $s=u_p\dfrac{(1-q^{n-p+1})}{1-q}$.

برهان

- إذا كان $q=1$ فإن: $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=u_p$ و منه $s=(n-p+1)u_p$.
- إذا كان $q\neq 1$ فإن: $s=u_p+u_{p+1}+...+u_n$ و $qs=u_{p+1}+u_{p+2}+...+u_{n+1}$

إذن: $s-qs=u_p-u_{n+1}$ وبما أن $u_{n+1}=u_pq^{n+1-p}$ فإن $(1-q)s=u_p-u_pq^{n+1-p}=u_p(1-q^{n+1-p})$.

و أخيرا: $s=u_p\dfrac{(1-q^{n-p+1})}{1-q}$.

❖ حالات خاصة

- $s=u_0+u_1+...+u_n=u_0\dfrac{(1-q^{n+1})}{1-q}$.
- $s=u_1+u_2+...+u_n=u_1\dfrac{(1-q^{n})}{1-q}$.

أمثلة

- بسط المجموع $s=1+q+q^2+...+q^n$ ثم استنتج $s=1+2+2^2+...+2^{63}$.
- (u_n) متتالية هندسية أساسها $q=3$ و $u_4=12$. أحسب $s=u_4+u_5+...+u_9$.

تمرين12

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0=2$ و $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+1}$.

1)- أحسب u_1 و u_2.

2)- لتكن (v_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $\forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n^2-2$.

أ- بين أن (v_n) هندسية محددا أساسها وحدها الأول.

ب- استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$.