الثانيـــة بكالوريـا علوم رياضيـــة	سلسلة 2 : الدوال العكسية مبرهنة القيم الوسيطية	الأستاذ : الحيـــان

التمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

1. حدد $\mathcal{D}_f$ حيز تعريف الدالة f .
2. حدد نهايات f عند محدات $\mathcal{D}_f$.
3. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]1,+\infty[$.

a- بين أن الدالة g تقابل من المجال I نحو مجال J ، ينبغي تحديده.

b- حدد $g^{-1}\left(\left[\dfrac{3}{2},2\right]\right)$.

c- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x)$.

d- حدد الدالة العكسية g^{-1} .

التمرين 2 :

1. بين أن المعادلة $-x^3+x+1=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن $\alpha\in]1,2[$.
2. بين أن المعادلة $x^3-3x+1=0$ تقبل بالضبط ثلاثة حلول في $\mathbb{R}$ ، ثم أعط تأطيرا لكل منها إلى 5×10^{-1} .
3. بين أن للمعادلة $x^3-6x^2+6=0$ حلان بالضبط في المجال $[-2,4]$.

التمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\forall x\in[0,+\infty[\quad : \quad f(x)=\sqrt{x^2+1}+2x$$

1. بين أن f رتيبة قطعا على المجال $[0,+\infty[$.
2. بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0,+\infty[$ نحو مجال J ، ينبغي تحديده .
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .
4. بين أن المعادلة $f(x)=x^3$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[1,2]$.

التمرين 4 :

1. بسط الأعداد التالية :

$$A=\frac{\sqrt[4]{9}.\sqrt{\sqrt[3]{3.\sqrt[3]{9}}}}{\sqrt[5]{81}.\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}} \quad \text{و} \quad B=\frac{\sqrt[3]{4}.\sqrt{8}.\left(\sqrt[5]{\sqrt{2}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

$$C=\frac{27^{\frac{2}{3}}.49^{-\frac{1}{2}}.16^{\frac{3}{4}}}{\left(9\sqrt{3}\right)^{\frac{2}{5}}} \quad \text{و} \quad D=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{\sqrt[3]{256}}\times\sqrt[4]{64}}{\sqrt[3]{1024}\times\sqrt[6]{64\times10^6}}$$

2. نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} g(x)=1+\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x} & ; \quad x\neq0 \\ g(0)=1 \end{cases}$$

أ- حدد $\mathcal{D}_g$ حيز تعريف الدالة g .

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

جـ- أدرس اتصال الدالة g في النقطة 0.

التمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$

1. حدد $\mathcal{D}_f$ وأحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. بين أن f تقابل من المجال $\mathcal{D}_f$ نحو مجال J ، ينبغي تحديده .
3. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .
4. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,1]$.

التمرين 6 :

1. بين أن:

$$\forall x\in]0,+\infty[\quad : \quad Arc\tan(x)+Arc\tan\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$$

2. أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(Arc\tan\left(\dfrac{1+x^2}{x}\right)-\dfrac{\pi}{2}\right)$

التمرين 7 :

1. بين أن لكل $a\geq0$ و $b\geq0$ ؛ لدينا :

$$Arc\tan(b)-Arc\tan(a)=Arc\tan\left(\frac{b-a}{1+ab}\right)$$

2. أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[Arc\tan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)-\dfrac{\pi}{4}\right]$

التمرين 8 :

أحسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)\sqrt[6]{x}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[4]{x^4+3x+1}-\sqrt[4]{x^4+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x+1}-\sqrt[3]{x^3+2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+3x+1}-2.\sqrt[3]{x^3+2}$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x-1}$ و $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+1}$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{2x+6}}{x-1}$

التمرين 9 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$f(x)=x^{n+1}-2x^n+1$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

1. أ- بين أن f تناقصية قطعا على المجال $\left[0,\frac{2n}{n+1}\right]$.

ب- استنتج أن : $f\left(\frac{2n}{n+1}\right)<0$.

2. بين أن : $\exists\alpha\in\left[\frac{2n}{n+1},2\right]\ /\ f(\alpha)=0$.

3. تحقق من أن : $\alpha^n=\frac{1}{2-\alpha}$.

التمرين 10 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي :

$$f(x)=\tan^2x-2\sqrt{3}\tan x$$

1. حدد $\mathcal{D}_f$، ثم ادرس رتابة f على المجال $D_k=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ لكل $k\in\mathbb{Z}$.

2. ليكن f_k قصور الدالة f على المجال I_k حيث $I_k=\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right[$. بين أن f_k تقابل من I_k نحو مجال J ينبغي تحديده ، ثم حدد التقابل العكسي f_k^{-1}.

3. ليكن g_k قصور الدالة f على المجال J_k حيث $J_k=\left]\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$. بين أن g_k تقابل من J_k نحو مجال K ينبغي تحديده ، ثم حدد التقابل العكسي g_k^{-1}.

التمرين 11 :

لتكن $f:[a,b]\to[a,b]$ دالة متصلة. بين أن f تقبل نقطة صامدة . أي : $\exists\alpha\in[a,b]\ /\ f(\alpha)=\alpha$.

التمرين 12 :

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال $[a,b]$ بحيث :

$$\forall x\in[a,b]\ :\ f(x)\le g(x)$$

وليكن λ عددا حقيقيا. بين أنه إذا كان لكل من f و g نقطة صامدة ، فإن الدالة h المعرفة على $[a,b]$ بما يلي

$h(x)=\lambda f(x)+(1-\lambda)g(x)$ تقبل أيضا نقطة صامدة.

التمرين 13 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2} & ;\ x>0 \\ f(x)=\frac{x^2+2}{2x^2+1} & ;\ x\le0 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال الدالة f في النقطة 0.

2. أ- بين أن: $\forall x\in]0,+\infty[\ :\ 0\le\frac{1-\cos(\sin(2x))}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$.

ب- استنتج $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.

3. ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-\infty,0]$.

أ- بين أن الدالة g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J ، يتم تحديده ، نحو المجال I .

ب- بين أن : $\forall x\in J\ :\ g^{-1}(x)=-\sqrt{\frac{2-x}{2x-1}}$.

جـ- بين أن المعادلة $g(x)=\sqrt{2}$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]-\frac{2}{3},-\frac{1}{2}\right[$.

4. استنتج أن : $\frac{1}{2}<\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-1}}<\frac{2}{3}$.

التمرين 14 :

لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]1,+\infty[$ كما يلي :

$$\forall x\in]1,+\infty[\ :\ f(x)=\frac{1-\sqrt{x^3}+\sqrt{x}}{x-1}$$

1. تحقق من أن : $f(x)=-\sqrt{x}+\frac{1}{x-1}$.

2. بين أن المعادلة : $\frac{1}{x-1}=\sqrt{x}$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,2[$.

3. بين أن : $\alpha^2(\alpha-2)=1-\alpha$.

التمرين 15 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$f(x)=Arc\tan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$$

1. بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 0<f(x)<\frac{\pi}{2}$.

2. أ- بين أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ 1-\tan^2(f(x))=2x\tan(f(x))$

ب- استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ x=\tan\left(\frac{\pi}{2}-2f(x)\right)$.

3. استنتج أن : $\forall x\in\mathbb{R}\ :\ f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}Arc\tan(x)$.