ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 01	2 باك علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية : 2012/2011	ذ : عبدالله بن لحتير
		مدة الإنجاز : ثلاث ساعات

■ التمرين رقم 01: $(02pts)$

⇦ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، نضع : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

1)- بين أن : $(\forall t \in \mathbb{R}); \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2)- أثبت أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); \operatorname{Arctan}(x) - S_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^x \dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

3)- إستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}); \left|\operatorname{Arctan}(x) - S_n(x)\right| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$ ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ لكل $x \in [-1;1]$.

■ التمرين رقم 02: $(3;5pts)$

⇦ لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \dfrac{\cos^2 x}{n^2}} dx$.

1)- أحسب التكامل u_1 .

2)- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ تزايدية قطعا و مكبورة ، ماذا تستنتج ؟

3)- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \dfrac{\pi}{2}\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} \leq u_n \leq \dfrac{\pi}{2}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4)- بين أن : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx = \dfrac{3\pi}{16}$.

5)- لكل $n \in \mathbb{N}^*$ ، نضع : $v_n = n^2 \times \left(\dfrac{\pi}{2} - u_n\right)$.

أ- بين أن لكل $x \in [0;1]$ ، لدينا : $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2}$.

ب- إستنتج أن لكل $x \in [0;1]$ ، لدينا : $1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \dfrac{x}{2}$.

ج- أثبت أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \left|v_n - \dfrac{\pi}{8}\right| \leq \dfrac{3\pi}{32n^2}$ ، ثم إستنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

■ التمرين رقم 03: $(1;5pts)$

⇦ نعتبر التكاملين : $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ و $J = \int_0^1 \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x} dx$.

1)- أحسب التكامل I (يمكنك وضع : $x = \dfrac{1-y}{1+y}$) .

2)- إستنتج قيمة التكامل J (يمكنك إستعمال مكاملة بالأجزاء) .

■ التمرين رقم 04: $(6;5pts)$

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*); F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-t^2} dt \text{ و } F(0) = 1 .$$

1)- بين أن الدالة F زوجية .

2)- أ- بين أنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+})(\exists c \in [0;x]); F(x) = e^{-c^2}$.

ب- إستنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر .

3)- أ- بين أن لكل $t \in [0;1]$ ، لدينا : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \dfrac{t^2}{2}$.

ب- إستنتج أن لكل $x \in [0;1]$ ، لدينا : $1 - \dfrac{x^2}{3} \leq F(x) \leq 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{10}$.

ج- أدرس قابلية إشتقاق الدالة F على اليمين في الصفر ، ثم أول هندسيا النتيجة المحصل عليها .

4)- أ- تحقق من أن لكل $t \in [1;+\infty[$ ، لدينا : $e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

ب- أثبت أن لكل $x \in [1;+\infty[$ ، لدينا : $F(x) \leq \dfrac{1}{x}\left[\int_0^1 e^{-t^2} dt + \left(\dfrac{1}{e} - e^{-x}\right)\right]$.

ج- إستنتج النهاية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي .

5)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ و أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}); F'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ ، حيث h هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $h(x) = xe^{-x^2} - \int_0^x e^{-t^2} dt$.

ب- أدرس تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^+$ ، ثم إستنتج أشارتها على $\mathbb{R}^{*+}$.

ج- ضع جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

6)- أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

■ **التمرين رقم 05:** (6;5pts)

⇦ لتكن G الدالة المعرفة بما يلي :

$$G(x)=\int_x^{x^2}\frac{1}{(t\ln t)^2}dt$$.

1)- أثبت أن : $D_G=]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2)- أ- بين أن : $(\forall t\in]1;+\infty[);0\le\frac{1}{(t\ln t)^2}\le\frac{1}{t(\ln t)^2}$.

ب- إستنتج أن : $(\forall x\in]1;+\infty[);0\le G(x)\le\frac{1}{2\ln x}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to+\infty}G(x)$.

3)- أ- بين أن : $(\forall t\in]1;2]);\frac{1}{(t\ln t)^2}\ge\frac{1}{2t(\ln t)^2}$.

ب- إستنتج أن : $(\forall x\in]1;\sqrt{2}]);G(x)\ge\frac{1}{4\ln x}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to1^+}G(x)$.

ج- بين أن : $(\forall x\in]0;1[);G(x)\le\frac{1}{2\ln x}$ ، ثم أحسب $\lim_{x\to1^-}G(x)$.

4)- بين أن : $\left(\forall x\in\left]0;\frac{1}{e}\right[\right);G(x)\le\frac{x-1}{x(\ln x)^2}$ ، ثم إستنتج $\lim_{x\to0^+}G(x)$.

5)- بين أن G قابلة للإشتقاق على كل من المجالين $]0;1[$ و $]1;+\infty[$ و أن :

$$(\forall x\in]0;1[\cup]1;+\infty[);G'(x)=\frac{1-2x}{2x^3(\ln x)^2}$$.

6)- ضع جدول تغيرات G ، ثم أرسم منحناها في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(نعطي : $G\left(\frac{1}{2}\right)\simeq-1;92$)

إنتهى الموضوع .

⇦ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .

⇦ تمارين إضافية:

■ **التمرين رقم 01:**

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على القطعة $[0;1]$.

▪ أثبت أن : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx$.

■ **التمرين رقم 02:**

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة و موجبة على $\mathbb{R}^+$ بحيث :

$$(\exists k\in\mathbb{R}^{*+})(\forall x\in\mathbb{R}^+);f(x)\le k\int_0^x f(t)dt$$.

▪ باعتبار الدالة : $F:x\mapsto e^{-kx}\int_0^x f(t)dt$ ، بين أن f منعدمة على $\mathbb{R}^+$.

■ **التمرين رقم 03:**

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}^+$.

▪ أثبت أن : $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)dt=\frac{1}{2}f(0)$ و $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^2}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}dt=f(0)\times\ln2$.

■ **التمرين رقم 04:**

1)- لتكن f دالة متصلة على قطعة $[a;b]$ بحيث : $\int_a^b f(x)dx=0$.

▪ بين أن المعادلة : $(E):f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في القطعة $[a;b]$.

2)- إستنتج أنه إذا كانت h دالة متصلة على القطعة $[0;1]$ بحيث : $\int_0^1 h(x)dx=\frac{1}{2}$ ، فإن المعادلة $(F):h(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في $[0;1]$.

■ **التمرين رقم 05:**

⇦ لتكن f و g دالتين عدديتين متصلتين على قطعة $[a;b]$.

▪ أثبت أنه : $(\exists c\in]a;b[);f(c)\int_a^c g(t)dt=g(c)\int_c^b f(t)dt$.

abouzakariya@yahoo.fr

tél : 06 67 85 15 26