| Filière : 1BSM-BIOF | Ensembles et Applications | Série de TD N°2 |
|---|---|---|
| Année scolaire : 2017-2018 | | Prof : Mohamed iaalou |

## Exercice N°1 :

On considère les ensembles définies par :

$A=\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$, $B=\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$

$E=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ et $F=\left\{-\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.

1- Montrer que $A\subset E$ et $B\subset E$.
2- Montrer que $A\cap B=\varnothing$ et $A\cup B=E$.
3- Montrer que $E=F$

## Exercice N°2 :

Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A=\left\{x\in[-2\pi,2\pi]/x=\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{3},k\in\mathbb{Z}\right\}$.

$B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+1=0\}$ ; $C=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x-2<0\}$

## Exercice N°3 :

On considère les ensembles $E$ et $F$ définies en compréhension par ;

$E=\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}\right\}$, $F=\left\{\frac{1}{1+\sqrt{1+x^2}},x\in\mathbb{R}\right\}$

1- Montrer que : $E\subset ]0,1]$ et $F\subset E$.
2- Vérifier que $1\in E$ et $1\notin F$. En déduire que $E\neq F$

## Exercice N°4 :

Soit $a$ et $b$ deux réels tel que $a<b$.

Monter que : $[a,b]=\{ta+(1-t)b/t\in[0,1]\}$.

## Exercice N°5 :

Soient $A$, $X$ et $Y$ des parties d'un ensemble $E$.

1- **a-** Montrer que : $X-A=(X\cup A)-A$.

**b-** En déduire que :
$(X\cup A)=(Y\cup A)\Rightarrow(X-A)=(Y-A)$.

2- **a-** Montrer que : $X=(X-A)\cup(X\cap A)$.

**b-** En déduire que : $\begin{cases}X\cap A=Y\cap A\\ X\cup A=Y\cup A\end{cases}\Rightarrow X=Y$

## Exercice N°8 :

Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble $E$.

1- Montrer que : $A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing\wedge B=\varnothing$.
2- On considère dans $\mathscr{P}(E)$ l'équation :
$(*):(A\cap X)\cup(B\cap\overline{X})=\varnothing$.

**a.** Montrer que $(*)$ admet une solution si et seulement si $A\cap B=\varnothing$.

**b.** On suppose que $A\cap B=\varnothing$.
Montrer que les solutions de $(*)$ sont les parties $X$ de $E$ qui vérifient $B\subset X\subset\overline{A}$.

## Exercice N°6 :

On considère l'application $f:\begin{array}{l}\mathbb{R}\to[0,+\infty[\\ x\mapsto\sqrt{x^2-x+1}\end{array}$

1- **a-** Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}, f(1-x)=f(x)$

**b-** $f$ est-elle injective ?

2- **a-** Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**b-** $f$ est -elle surjective ?

3- Démontrer que : $f\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right)=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

4- soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$.

**a-** Monter que $g$ est une bijection de $I$ vers $J=\left[\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right[$.

**b-** déterminer sa bijection réciproque $g^{-1}$

## Exercice N°7 :

Soit $f$ l'application définie de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

1- Monter que $f$ est une application bijective.
2- Déterminer sa bijection réciproque.
3- Déterminer $f([3,+\infty[)$.

## Exercice N°9 :

On pose $I=]0,+\infty[$ et on considère l'application $f$ définie de $I\times I$ vers $I\times I$ par $f((x,y))=\left(xy,\frac{x}{y}\right)$.

1- Montrer que $f$ est une application bijective.
2- Déterminer sa bijection réciproque $f^{-1}$.

## Exercice N°9 :

Soit l'application $f:x\mapsto x-\sqrt{x^2+1}$

1- Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}: f(x)<0$
2- Montrer que $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $f$ est injective.
3- Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, x+\sqrt{x^2+1}=-\frac{1}{f(x)}$
4- En déduire que $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-\infty,0[$ et déterminer l'expression de sa bijection réciproque $f^{-1}$.