ثانوية موسى بن نصير مديرية الخميسات	فرض محروس رقم 04 الدورة الأولى 2017/2016	2 بكالوريا علوم رياضية مدة الانجاز : أربع ساعات ذ : عبدالله بن الحتير

❖ تمرين رقم 01: 5 pts

⇦ لتكن F الدالة المعرفة بما يلي :

$$F(x)=\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{(1+t)^2}dt .$$

1)– أ– تحقق من أن : $D_F=\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$. 0,75

ب– بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e},1\right]\right),F(x)\le x\left(1-\frac{1}{1+\ln x}\right)$ ، ثم إستنتج $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{e}\right)^+}F(x)$. 1

2)– أ– بين أن : $\left(\forall x\in\left]\frac{1}{e},+\infty\right[\right),F(x)=\frac{x}{(1+\ln x)^2}-1+2\int_0^{\ln x}\frac{e^t}{(1+t)^3}dt$. 1

ب– استنتج أن : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right),F(x)\ge\frac{x}{(1+\ln x)^2}-1$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$. 0,75

3)– أ– بين أن F قابلة للإشتقاق على D_F و أن : $\left(\forall x\in D_F\right),F'(x)=\frac{1}{(1+\ln x)^2}$. 1

ب– ضع جدول تغيرات F . 0,5

❖ تمرين رقم 02: 6 pts

⇦ لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx .$$

1)– بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),0\le u_n\le\frac{1}{n+1}$ ، ثم استنتج نهاية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0,5

2)– باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_{n+2}=\frac{n+1}{n+4}\times u_n$. 1

3)– لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),F(x)=\int_0^{\cos x}\sqrt{1-t^2}\,dt .$$

أ– بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}\right),F'(x)=-|\sin x|\times\sin x$. 1

ب– استنتج تعبير F على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ، ثم أحسب التكامل u_0 . 1

4)– أ– بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),\frac{n+1}{n+4}\le\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 1$ ، ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. 0,75

ب– احسب u_1 ، ثم بين بالترجع أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}\right),u_n\times u_{n+1}=\frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$. 1

ج– بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty}n\sqrt{n}\times u_n=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. 0,75

6 pts
❖ تمرين رقم 03:

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$F(0)=0 \text{ و } \left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right), F(x)=\int_x^{2x}\frac{1-e^{-2t}}{t}dt .$$

0,25 — 1)– أ– بين أن : $\left(\forall t\in\mathbb{R}_+^*\right), e^{-2t}(2t+1)-1<0$.

0,25 — ب– بين أن الدالة : $f: t\mapsto \dfrac{1-e^{-2t}}{t}$ تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$.

0,5 — 2)– أ– بين أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right), x.f(2x)\le F(x)\le x.f(x)$.

0,75 — ب– ادرس إتصال و قابلية إشتقاق F على اليمين في الصفر، ثم أول هندسيا النتيجة .

0,5 — 3)– أ– بين أن : $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right), \dfrac{1}{t}-e^{-2t}\le f(t)\le \dfrac{1}{t}$.

0,5 — ب– استنتج أن : $\left(\forall x\in[1,+\infty[\right), \ln 2-\dfrac{1}{2}\left(e^{-2x}-e^{-4x}\right)\le F(x)\le \ln 2$.

0,5 — ج– احسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ ، ثم اعط تأويلها الهندسي .

0,75 — 4)– أ– بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ و أن : $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right), F'(x)=\dfrac{e^{-2x}-e^{-4x}}{x}$.

1 — ب– ضع جدول تغيرات F ، ثم أرسم المنحنى (C_F) في معلم متعامد و ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

3 pts
❖ تمرين رقم 04:

⇦ ليكن $\alpha\in[0,1[$ و $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي :

$$\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2k+1}}{2k+1} \text{ ، حيث } x\in[0,\alpha] .$$

0,25 — 1)– أ– تحقق أن : $\left(\forall k\in\mathbb{N}\right), \displaystyle\int_0^x t^{2k}dt=\frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

0,75 — ب– بين أن : $\left(\forall x\in[0,\alpha]\right), \displaystyle\int_0^x\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

0,75 — 2)– أ– بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), S_n=\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}dt$.

0,5 — ب– بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), 0\le\displaystyle\int_0^x\frac{t^{2n}}{1-t^2}dt\le\frac{1}{2n+1}\times\frac{x^{2n+1}}{1-\alpha^2}$.

0,75 — ج– استنتج أن المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة محددا نهايتها ، ثم أحسب نهاية المتتالية $(T)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بما يلي : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right), T_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3\times 2^3}+\dfrac{1}{5\times 2^5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)\times 2^{2n-1}}$.

○ تمرين إضافي رقم 01:

2+1 — 1)– احسب التكاملين : $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin^2 x}dx$ و $J=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}dx$.

2)– ليكن $a\in\mathbb{R}_+^*$ و f دالة عددية متصلة على القطعة $[0,a]$ بحيث :

$$f([0,a])\subset\mathbb{R}-\{-1\} \text{ و } \left(\forall x\in[0,a]\right), f(x)\times f(a-x)=1 .$$

1 — ✓ احسب بدلالة a التكامل التالي : $K=\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}dx$.

⭘ تمرين إضافي رقم 02:

I- لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x\in\mathbb{R}), f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} .$$

1)- أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو المجال $]-1,1[$.

ب- حدد التقابل العكسي f^{-1} .

2)- أ- ارسم (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (حيث الوحدة هي $1cm$) .

ب- ليكن $\lambda\in]0,1[$. و لتكن σ_λ مساحة الحيز المستوى (Δ_λ) المحصور بين (C_f) و $(C_{f^{-1}})$

و المستقيمات التي معادلاتها : $x=0$ و $x=\lambda$ و $y=\lambda$.

✓ مثل بعناية الحيز (Δ_λ) ، ثم بين أن : $\sigma_\lambda=\lambda^{2}-2.\ln\left(\frac{e^{\lambda}+e^{-\lambda}}{2}\right)cm^{2}$.

II- لكل $x\in\mathbb{R}^{+}$ ، نضع : $F_0(x)=x$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}), F_n(x)=\int_0^x\left[f(t)\right]^{n}dt$.

1)- عبر عن $F_1(x)$ بدلالة x .

2)- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}), 0\leq F_n(x)\leq x.\left[f(x)\right]^{n}$ ، ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)$.

3)- أ- تحقق من أن : $(\forall t\in\mathbb{R}), f'(t)=1-\left[f(t)\right]^{2}$.

ب- استنتج أن : $(\forall k\in\mathbb{N}), F_{k+2}(x)=F_k(x)-\frac{1}{k+1}.\left[f(x)\right]^{k+1}$.

ج- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}), F_{2n}(x)=x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}.\left[f(x)\right]^{2k-1}$.

د- احسب نهاية المتتالية $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^{*}}$ المعرفة بما يلي : $(\forall n\in\mathbb{N}^{*}), S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)\times3^{2k-1}}$.

⭘ تمرين إضافي رقم 03:

⇦ لتكن f دالة عددية متصلة على القطعة $[0,1]$.

✓ بين أن : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(x)dx=\int_0^1(1-x)f(x)dx$.

▪ تخصص نقطة إضافية لحسن التنظيم و جودة التحرير و الدقة في الأجوبة .