Corrigé sommaire de l'examen de Bac Sc.Mathématiques, Maroc 2014-2015,

A télécharger du site : riadyate.net

SANI Ahmed, Zagora

20 juin 2015

1 Préambule :

Comme à l'accoutumée, nous présentons quelques éléments de solutions du sujet tout en insistant sur les propriétés docimologiques qu'un examen ceritifiant doit/ ou est censé respecter notamment la conformité aux instructions officielles et aux cadres de référence.

2 Arithmétique :

x est un entier vérifiant : **(E)** $x^{1439} \equiv 1436[2015]$.

1. L'égalité suggérée montre l'existence de d'un couple d'entiers $(u, v) = (1051, 749)$ tel que $1436u + 2015v = 1$. Le théorème de Bezout permet de conclure.
2. d divise x et 2015. L'écriture $a \wedge b = 1$ signifie a et b sont premier entre eux

   a. La relation **(E)** entraine : $1436 = x^{1439} - 2015k$ ou k est un entier relatif. Si d divise x et 2015 alors il divise x^{1439} et $2015k$, donc, il divise leur différence.

   b. Tout diviseur commun d de x et 2015 est un diviseur commun de 1436 et 2015 (d'après 2.a) donc $d = 1$ puisque ces deux derniers nombres sont premiers entre eux (d'après la question 1).
3. La consigne oblige d'utiliser le théorème de Fermat :

   a. Lorsque le nombre premier p prend l'une des trois valeurs entières 5, 13 ou 31, alors le théorème de Fermat affirme que pour tout entier x non multiple de p, on a $x^{p-1} \equiv 1[p]$. D'aprés 2.b, 2015 est premier avec x, donc $x \wedge d = 1$ pour tout diviseur (premier ou non) de 2015. En particulier,

$x \wedge 5 = 1$, $x \wedge 13 = 1$ et $x \wedge 31 = 1$. Comme il est facile de vérifier que 1440 est multiple de 4, 12 et 30, les congruences demandées deviennent évidentes.

b. La sous question précédente assure que $5/x^{1440} - 1$ (5 divise ...) et $13/x^{1440} - 1$. Puisque 5 et 13 sont deux nombres premiers distincts, alors il sont naturellement premiers entre eux, donc $5 \times 13/x^{1440} - 1$, soit $65/x^{1440} - 1$. En reprenant texto le même argument avec 65 et 31, on démontre la dernière égalité de congruence.

4. Plusieurs formulations sont possibles mais l'argument est toujours le même. Il est possible de procéder par un calcul direct, comme il est permis d'utiliser l'unicite de l'inverse dans $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$ (pour les éléments inversibles bien sûr). La majorité des candidats opteront pour les premières formulations. Pour un enrichissment, présentons la seconde : D'une part

$$\textbf{(E)} \Longrightarrow x.x^{1439} \equiv 1436x[2015]$$

et comme $x^{1440} \equiv 1[2015]$, alors $1436x \equiv 1[2015]$. Autrement dit, x est l'inverse de 1436 dans $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$. D'autre part la relation proposée par l'énoncé $1051 \times 1436 - 749 \times 2015 = 1$ permet, aprés un passage licite à la congruence modulo 2015, d'écrire $1051 \times 1436 \equiv 1[2015]$. Cela veut dire que l'inverse de 1051 dans $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$ est 1436. L'unicité de l'inverse dans tout anneau commutatif tel $\mathbb{Z}/2015\mathbb{Z}$ entraîne directement que $x \equiv 1051[2015]$.

Commentaire : Choix bien réussi de l'exercice. L'absence du renvoi au registre algébrique de structure s'explique par l'existence d'un autre exercice traitant cet aspect. Cependant, La proposition serait didactiquement efficiente si l'aspect algorithmique a fait objet d'au moins une question. Je fais là allusion à la division Euclidienne et l'algorithme attaché. Comme ça, on remédie également au problème de couverture. Cette impureté est tolérable si l'exigence de représentativité est prise au sérieux au détriment de tout autre facteur.

3 Calcul complexe :

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on considère l'équation

$$\textbf{(E)} \quad z^2 - (5 + i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$$

1. Le calcul du disriminant est facile. Il importe de rappeler (le candidat) qu'il est nécessaire de le faire à bon escient et de

rédiger minutieusement les étapes de calcul. $\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2$. Faites vos calculs!!!.

2. Une racine de Δ est $3 - i\sqrt{3}$.

   a. Les formules classiques donnant les solutions du trinome de secon degré donnent $b = 4$ et $a = 1 + i\sqrt{3}$.

   b. $(1 + i\sqrt{3})a = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = 1 + 3 = 4 = b$. (Ce fut juste pour vérifier le résultat)

3. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on considère les point A et B d'affixes respectifs a et b.

   a. La rotation r d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A relie le point $M(z)$ au point $M'(z')$ tel que : $z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$. Donc $b_1 - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(0 - a)$. D'où $b_1 = a - ia = (1 + i\sqrt{3})(1 - i) = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

   b. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $Z_1 = b - a = 3 - i\sqrt{3}$ et le vecteur $\overrightarrow{AB_1}$ a pour affixe $Z_2 = b_1 - a = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1) - 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{3} - i$. Il suffit de vérifier que $Z_1 = \sqrt{3}Z_2$. Donc, B est l'image de B_1 par l'homothétie $h(A, \sqrt{3})$.

   c. $b = 4$ donc $arg(b) = 0[2\pi]$. L'on a :

   $$b - a = 3 - i\sqrt{3} = \sqrt{3}(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2})$$

   donc $b - a = 2\sqrt{3}(\cos(\frac{-\pi}{6}) + i\sin(\frac{-\pi}{6}))$. D'où

   $$arg(\frac{b}{b-a}) \equiv arg(b) - arg(b-a) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

4. Il est toujours conseillé de faire un croquis. L'argument demandé dépend de la position de C sur le cercle circonscrit. Si C est sur l'arc $\widehat{AO}$, les deux angles $\widehat{ABO}$ et $\widehat{ACO}$ sont égaux car ils interceptent le même arc, sinon les deux angles sont complémentaires et $(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO}}) = \pi - (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}})$. Comme $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}}) = arg(\frac{b}{b-a})$, il est facile de conclure.

On considère l'ensemble : $E\{M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}\}$. L'ensemble E est muni de la loi de composition interne T définie par

$$M(x)TM(y) = M(x + y + 1).$$

1. Soit ϕ l'application $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (E, T)$ donnée par $\phi(x) = M(x - 1)$.

a. Montrons que ϕ est un endomorphisme. Soient a et b dans $\mathbb{R}$. On voit que

$$\phi(a)T\phi(b) = M(a-1)TM(b-1) = M(a-1+b-1+1) = M(a+b-1) = \phi(a+b).$$

b. Pour conclure, il est nécessaire de mentionner la surjectivité de ϕ. L'application $x \mapsto x-1$ est bijective sur $\mathbb{R}$. Ce qui, par construction de E, permet d'assurer que ϕ est effectivement surjective. Comme ϕ est un endomorphisme et comme $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, il en est de même pour $(\phi(\mathbb{R}), T) = (E, T)$.

2. Etude de la structure de $(E, T, \times)$.

a. Le calcul est évident, mais le candidat est appelé à le rédiger soigneusement sur sa copie.

b. Le fait que, d'aprés 2, on ait : $M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$ montre que le produit de 2 éléments de E reste dans E, c-à-d E est stable par produit matriciel car $M(x+y+xy) \in E, \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. La commutativité découle de la symétrie dans l'expression $x+y+xy$ qui est identique à $y+x+yx$.

c. Disributivité de $\times$ par rapport à T dans $(E, T, \times)$. Soient k, a et b trois réels.

$$\begin{aligned} M(k) \times [M(a)TM(b)] &= M(k) \times M(a+b+1) \\ &= M(k+a+b+1+ka+kb+k) \\ &= M(k(a+1)+k(b+1)+k+1) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} [M(k) \times M(a)]T[M(k) \times M(b)] &= M(k+a+ka)TM(k+b+kb) \\ &= M(k+a+b+ka+ka+kb+k+1) \\ &= M(k+ka+k+kb+k+k+1) \\ &= M(k(a+1)+k(b+1)+k+1) \end{aligned}$$

La distibutivité est ainsi démontrée.

d. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $M(-1)TM(x) = M(x)TM(-1) = M(-1+x+1) = M(x)$. Il suffit pour la loi $\times$ de remarquer que la matrice identité vérifie : $I_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = M(0)$.

3. Inversibilité :

a. Un calcul direct donne le résultat. Inutile de le reprendre ici puisqu'il suffit de remplacer y par $\frac{-x}{1+x}$ dans l'égalité $M(x) \times M(y) = M(x+y+xy)$.

b. D'aprés les questions et sous questions 1 et 2, $(E, T, \times)$ est un anneau commutatif unitaire, d'unité $I_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$; et d'aprés 3.a, tout élément $M(x)$ différent de $0_E = M(-1)$ est inversible d'inverse $M^{-1} = M(\frac{-x}{x+1})$, donc $(E, T, \times)$ est bien un corps commutatif.

4 Analyse I :

4.1 Partie I :

Soit f la fonction

$$f(x) := \begin{cases} x(1+\ln^2 x) & \text{si } \ x > 0, \\ 0 & \text{pour } \ x = 0, \end{cases}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Trivialement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \ln^2 x = +\infty$
2. Continuité et dérivabilité :

   a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + x\ln^2 x = \lim\limits_{t\to 0} t^2 + \dfrac{1}{4}(t\ln t)^2 = 0$. Où l'on a mis $t = \sqrt{x} = f(0)$. Donc f est continue à droite en zéro.

   b. $\lim\limits_{x\to} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to} 1 + \ln^2 x = +\infty$. Ceci traduit la non dérivabilité de f à droite en zéro.

   Calcul de f' : Pour tout $x > 0$, la fonction est produit et composée de fonctions dérivables, donc elle-même dérivable et l'on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x)'(1+\ln^2 x) + x(1+\ln^2 x)' \\ &= 1 + \ln^2 x + 2x\frac{\ln x}{x} \\ &= 1 + \ln^2 x + 2\ln x \\ &= (1+\ln x)^2 \end{aligned}$$

   On voit que, excepté pour le nombre $\frac{1}{e}$, la dérivée de f est strictement positive. Donc f, étant continue en zéro, est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

   Warning : Le candidat qui se veut rigoureux doit mentionner la continuité de f en zéro, faute de quoi la monotonie n'est garantie que sur $]0, +\infty[$. Le correcteur doit en être conscient et rester vigilant mais indulgent avec le candidat qui a montré une souplesse dans la rédaction de la dérivabilité de f.
3. Le graphe :

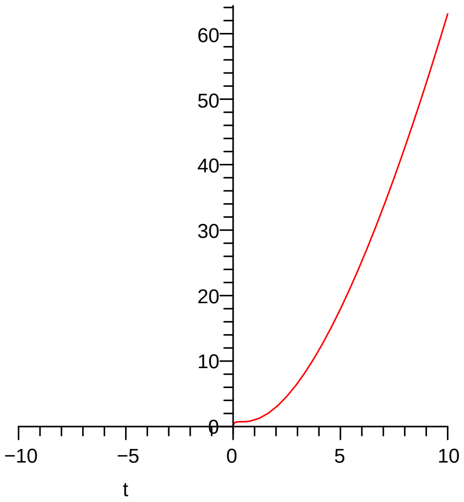

FIGURE 1 – Courbe de f

a. Comme f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ (en fait, elle y est indéfiniment dérivable), il suffit de calculer f''.

$$\begin{aligned} f''(x) &= [(1 + \ln x)^2]' \\ &= 2(1 + \ln x)'(1 + \ln x) \\ &= \frac{2}{x}(1 + \ln x). \end{aligned}$$

Ainsi, $f''(x) = 0 \iff 1 + \ln x = 0 \iff x = e^{-1}$. L'étude de signe de f'' montre que celui-ci change de part et d'autre de $x_0 = \frac{1}{e}$. Donc le point $A(\frac{1}{e}, f(\frac{1}{e})) = A(e^{-1}, \frac{2}{e})$ est bien un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$.

b. $\forall x > 0$ $f(x) - x = x \ln^2 x > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est toujours au dessus de la droite $y = x$.

c. La courbe de f.

4.2 Partie II :

Soit la suite (u_n) définie par

$$u_n := \begin{cases} f(u_{n-1}) & \text{si} \quad n \geq 1, \\ \frac{1}{e} & \text{si} \quad n = 0, \end{cases}$$

1. Une simple récurrence permet d'établir le résultat en remarquant que f est croissante sur $[\frac{1}{e}, 1]$ et que, selon la question I.3.b, $f(x) > x,\ \forall x > 0$ en particulier $f(\frac{1}{e}) > \frac{1}{e}$.
2. Toujours d'aprés question I.3.b, $f(u_n) > u_n$, soit $u_{n+1} > u_n$. D'où la monotonie de $(u_n)_{n\geq 0}$. Comme (u_n) est monotone et bornée (précisément croissante et majorée) alors elle converge.
3. L'on a posé $\lim u_n = l$

   a. Le passage à la limite dans l'inégalité $\frac{1}{e} < u_n < 1$ donne

$$\frac{1}{e} \leq l \leq 1 \tag{4.1}$$

   b. La définition de $(u_n)_n$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{e}$ avec f continue et $f([\frac{1}{e}, 1]) \subset [\frac{1}{e}, 1]$ assure que l vérifie : $f(l) = l$, c'est à dire $l = 0$ ou $\ln^2 x = 0$. Autrement dit $l = 0$ ou $l = 1$. Conformément à (4.1), $l = 1$.

4.3 Partie III :

La fonction F est définie sur $[0, +\infty[$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1. Vers une formule explicite de F :

   a. On mentionne d'abord la dérivabilité de la fonction H sur $]0, +\infty[$ proposée par l'énoncé comme produit puis somme de fonctions usuelles dérivables sur $]0, +\infty[$. Aprés,

$$H'(x) = (-\frac{1}{4}x^2)' + (\frac{1}{2}x^2 \ln x)' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}2x \ln x = x \ln x$$

   b. Il s'agit là d'une intégration par parties. Le fait de ne pas demander expressément un usage directe de cette formule est acceptable pour des élèves de Sc. mathématiques, à l'encontre d'une consigne différente pour les autres branches. Aprés avoir mentionné brièvement la possibilité d'utiliser l'intégration par parties, on pose $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln^2 t$. Il vient

$$\begin{aligned} \int_1^x t \ln^2 t dt &= [\frac{t^2}{2} \ln^2 t]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2} 2 \frac{1}{t} \ln t dt \\ &= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int_1^x t \ln t dt \end{aligned}$$

   c. On rappelle que $\forall t > 0\ f(t) = t(1 + \ln^2 t)$, donc $\forall x > 0\ F(x) = \int_1^x t + t \ln^2 t dt$. La linéarité de l'intégrale permet d'écrire :

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_1^x t dt + \int_1^x t\ln^2 t dt\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int_1^x t\ln t dt,\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x - H(x) + H(1),\\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4} + \frac{x^2}{2}\ln^2 x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x \text{ car } H(1) = \frac{-1}{4}.\end{aligned}$$

En rassemblant les termes en x^2, on obtient le résultat.

2. **a.** L'expression de F obtenue en 1.c montre qu'elle est continue sur $]0, +\infty[$. Le seul problème est donc en zéro. Il suffit de rappeler la limite de référence $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0+} x^2\ln x = 0$ pour affirmer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$.
Remarque : Il faut là encore souligner que la continuité de l'intégrande (ou fonction à intégrer) f sur $\mathbb{R}^+$ prouvée en première partie suffit pour dire directement que F est continue sur $[0, +\infty[$. Le correcteur doit en être conscient. Cela dérangerait l'élève "érudit" qui croirait à une succesion didactiquement contractée des questions. Aussi faut-il y prendre garde. Cela ne touche en rien la qualité de l'épreuve qui a ciblé l'élève "moyen". C'est normal pour un examen certifiant.

   b. Un calcul direct donnerait : $\lim\limits_{x\to 0+} F(x) = \dfrac{-3}{4}$. Cette valeur est celle $\int_1^0 f(t)dt$. Un signe "moins" ferait l'affaire !!!

4.4 Exo4

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} & \text{si } \ x > 0,\\ 0 & \text{pour } \ x = 0,\end{cases}$$

1. Continuité en zéro : Il faut insister sur le choix $x > 0$

   a. $\forall t \in [x, 2x]$ on a, grâce à la monotonie de $u \mapsto e^u$ sur $\mathbb{R}$:

$$x \le t \le 2x \Longrightarrow -2x \le -t \le -x \Longrightarrow e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x}.$$

   b. Dans l'implication précédente, on multiplie les membres par le même nombre strictemnt positif t. On obtient : $\frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t}$. On intégre les trois membres entre x et $2x$

en signalant que l'ordre est préservé par l'intégration sur $[a, b],\ a < b$. D'où :

$$\int_x^{2x} \frac{e^{-2x}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^{-x}}{t} dt.$$

En intégrant, on obtient l'égalité demandée.

c. Dans l'inégalité précédente, on passe à la limite lorsque $x \to 0$. Les 2 membres de gauche et droite tendent vers $\ln 2$, donc $\lim_{x\to 0} g(x) = \ln 2 = g(0)$. C'est-à-dire que g est continue à droite en 0.

2. On considère la fonction $\phi : \ t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$. Alors $g(x) = \phi(2x) - \phi(x)$. Comme ϕ sur $\mathbb{R}_+^*$ est continue, alors $x \mapsto \int_1^x \phi(t)dt$ et $x \mapsto \int_1^x \phi(t)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc g est aussi dérivable sur comme différence de 2 fonctions trivialement dérivables. Et l'on a :

$$\forall x > 0 \ g'(x) = 2\phi'(2x) - \phi'(x) = 2\frac{e^{-2x}}{2x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-2x} - e^{x}}{x}.$$

3. Dérivabilité en zéro :

a. Appliquons le TAF à la fonction $h : \ t \mapsto e^{-t}$. Cette fonction est trivialement continue sur $[0, t]$ et est dérivable sur $]0, t[$ pour tout $t > 0$. Il vient qu'il existe $c_t \in]0, t[$ tel que $h(t) - h(0) = -e^{-c_t}(t - 0) = -e^{-c_t}t$. Or $0 < c_t < t$ donc $e^{-t} < e^{-c_t} < 1$. Il suffit, tenant compte du fait que $h(0) = 1$ et $h(t)e^{-t}$ de multiplier par -1 pour retouver que $-1 \leq \frac{e^{-t}-1}{t} \leq -e^{-t}$.

b. Il suffit d'intégrer la dernière égalité (celle de 3.a) entre x et $2x$ puis diviser par $x > 0$.

c. On passe à la limite dans l'inégalité $-1 \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$. On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-2x} - e^{x}}{x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\frac{e^{-x} - 1}{x} = -1$$

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -1.$$

C'est la dérivabilité à droite en zéro.

<u>Note :</u>

Prière à toute personne ayant détecté une impureté ou désirant apporter des améliorations de le signaler par courriel à l'adresse suivante : ahmedsani82@gmail.com