

التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب لآلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(0, -1, 1)$ و $B(1, -1, 0)$

والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$

$$1. \text{ لدينا : } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \sqrt{3}^2$$

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1, 0, 2)$ وشعاعها $R = \sqrt{3}$. ولدينا : $0^2 + (-1)^2 + 1^2 - 2 \times 0 - 4 \times 1 + 2 = 0$ ، إذن $A \in (S)$

$$2. \text{ لدينا : } \vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ، ومنه فإن : } \vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

وبالتالي فإن : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(1, 1, 1)$

3. لدينا : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(1, 1, 1)$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) . إذن معادلة المستوى (OAB) تكتب على شكل

$x + y + z + d = 0$ ، وبما أن $O \in (OAB)$ ، فإن $x + y + z = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (OAB) .

$$\text{لنحسب مسافة النقطة } A \text{ عن المستوى } (OAB) : d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$$

وعليه فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A على اعتبار أن $A \in (S)$ و $A \in (OAB)$.

التمرين الثاني :

1. نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $z^2 - 6z + 34 = 0$. مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = (-3)^2 - 1 \times 34 = 9 - 34 = -25 = (5i)^2$

وبالتالي فإن للمعادلة السابقة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_2 = \frac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{-(-3) - 5i}{1} = \boxed{3 - 5i} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{-(-3) + 5i}{1} = \boxed{3 + 5i}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{3 - 5i, 3 + 5i\}$

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي

لحقها $4 - 2i$. $a = 3 + 5i$ و $b = 3 - 5i$ و $c = 7 + 3i$. لتكن النقطة $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالازاحة T ذات المتجهة \vec{u} التي

$$\text{أ- لدينا : } M' = T(M) \Leftrightarrow \vec{MM}' = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + \text{aff}(\vec{u}) \Leftrightarrow \boxed{z' = z + 4 - 2i}$$

وبما أن : $a + 4 - 2i = 3 + 5i + 4 - 2i = 7 + 3i = c$ ، فإن : $C = T(A)$ أي C هي صورة A بالازاحة T .

$$\text{ب- لدينا : } \frac{b-c}{a-c} = \frac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} = \boxed{2i}$$

$$\overline{(\vec{CA}, \vec{CB})} \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) [2\pi]$$

$$\text{ج- لدينا : } \frac{b-c}{a-c} = 2i = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ، إذن :}$$

$$\overline{(\vec{CA}, \vec{CB})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C ولدينا : $\frac{CB}{CA} = \left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 2$ ، إذن : $\boxed{BC = 2AC}$

2. بما أن : $e > 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0$ ، فإن : $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$.
 ولدينا : $g(2) = 2(1 - \ln 2)$ قيمة دنوية مطلقة للدالة g على المجال $]0, +\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن :
 $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) \geq g(2) > 0$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - (\ln x)^2$.

1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - (\ln x)^2 = -\infty$.
 المنحنى (\mathcal{C}) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$.

2. أ- نضع : $t = \sqrt{x}$. إذن : $x \rightarrow +\infty$. وحيث أن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(t^2)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 1$.

ج- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(\ln x)^2 = -\infty$.

(\mathcal{C}) يقبل فرعا شلجيميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$.

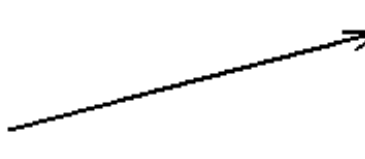
د- لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[: f(x) - x = -(\ln x)^2 \leq 0$. إذن المنحنى (\mathcal{C}) يوجد تحت المستقيم (Δ) .

3. أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$ ، لدينا : $f'(x) = (x - (\ln x)^2)' = 1 - 2 \ln'(x) \ln x = 1 - \frac{2 \ln x}{x} = \frac{x - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$.

وحسب إشارة $g(x)$ في الجزء الأول ، لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) > 0$. إذن f تزايدية على $]0, +\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

$-\infty$ 

ج- معادلة المماس للمنحنى (\mathcal{C}) في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = x$.

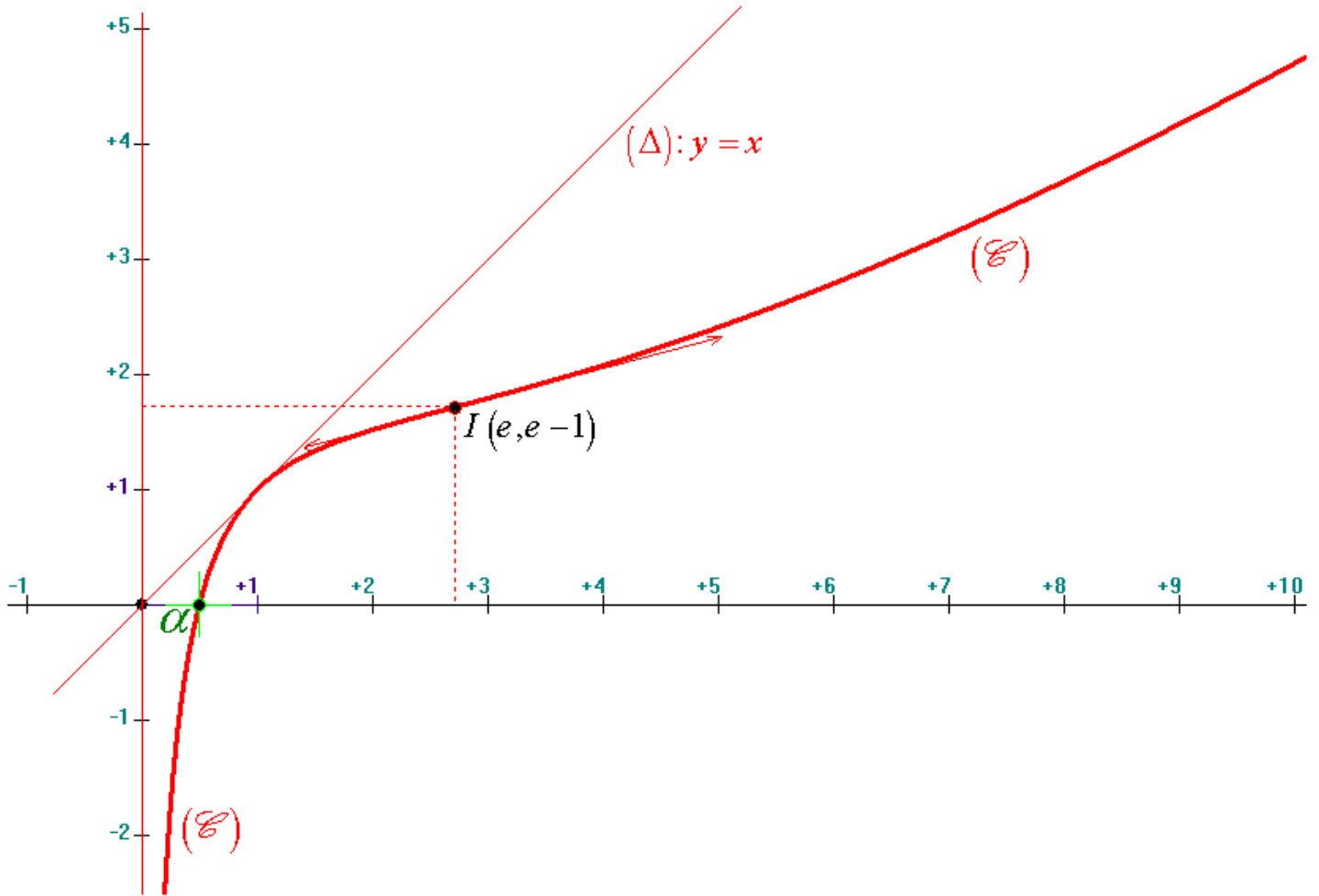
4. لدينا : f متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال J حيث :

فإن $0 \in J$ ، وبما أن $I =]0, +\infty[$ نحو المجال $J = f(]0, +\infty[) = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$
 المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $I =]0, +\infty[$.

وبما أن : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (\ln 2)^2 > 0$ (لأنه حسب المعطيات $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$).

فإنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة ، لدينا : $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$.

5. إنشاء المنحنى (\mathcal{C}) : $I(e, e-1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (\mathcal{C}) . $e \approx 2,7$. $\alpha \approx 0,4948664145$



6. أ- لدينا : $H : x \mapsto x \ln x - x$: إذن $\forall x \in]0, +\infty[: H'(x) = (x \ln x - x)' = x' \ln x + x \ln' x - 1 = \ln x$
 هي دالة أصلية للدالة $\ln : x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$ ، ولدينا :

$$\int_1^e \ln(x) dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = 0 - (-1) = \boxed{1}$$

ب- باستعمال المكاملة بالأجزاء، لدينا :

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln(x)^2 dx &= \int_1^e H'(x) \ln(x) dx = [H(x) \ln(x)]_1^e - \int_1^e H(x) \ln'(x) dx \\ &= H(e) \ln(e) - H(1) \ln(1) - \int_1^e \frac{x \ln x - x}{x} dx \\ &= -\int_1^e (\ln(x) - 1) dx = -\int_1^e \ln(x) dx + (e - 1) = \boxed{e - 2} \end{aligned}$$

- حسب السؤال أعلاه -

ج- مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = e$ و $x = 1$ هي :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x) - x| dx = \int_1^e (x - f(x)) dx = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \boxed{e-2} \approx 0,7 (u.a.)$$

الجزء الثالث :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; n \in \mathbb{N} \quad \text{نعتبر المتتالية العددية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة كما يلي :}$$

1. لنبين بالترجع أن : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$.

✓ من أجل $n = 0$ ، لدينا : $u_0 = 2$ ، إذن : $1 \leq u_0 \leq 2$.

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$.

✚ نفترض أن : $1 \leq u_n \leq 2$.

✚ لنبين أن : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

نعلم أن f تزايدية على المجال $]0, +\infty[$. إذن : $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

لأن : $f(2) - 2 = -(\ln 2)^2 \leq 0 \Rightarrow f(2) \leq 2$.

✓ وبالتالي فإن : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$.

2. ليكن $n \in \mathbb{N}$. لدينا : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -(\ln(u_n))^2 \leq 0$. إذن : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية.

3. بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية تناقصية ومصغرة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة . ولدينا :

✓ f دالة متصلة على المجال $[1, 2]$.

✓ f دالة متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[1, 2]$. إذن : $f([1, 2]) = [f(1), f(2)] \subset [1, 2]$ ، لأن : $f(2) \leq 2$.

✓ $u_0 = 2 \in [1, 2]$.

✓ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية متقاربة نهايتها l .

حسب مصاديق التقارب ، لدينا : $f(l) = l$ و $l \in [1, 2]$.

ولدينا : $f(l) = l \Leftrightarrow l - (\ln(l))^2 = l \Leftrightarrow \ln(l) = 0 \Leftrightarrow l = 1$. وبالتالي فإن : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$.

النتيـجـة

مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (\mathcal{C}) والمستقيم (Δ) والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = e$ و $x = 1$ باستعمال Maple 7

> **f:=x->x-(ln(x))^2;**

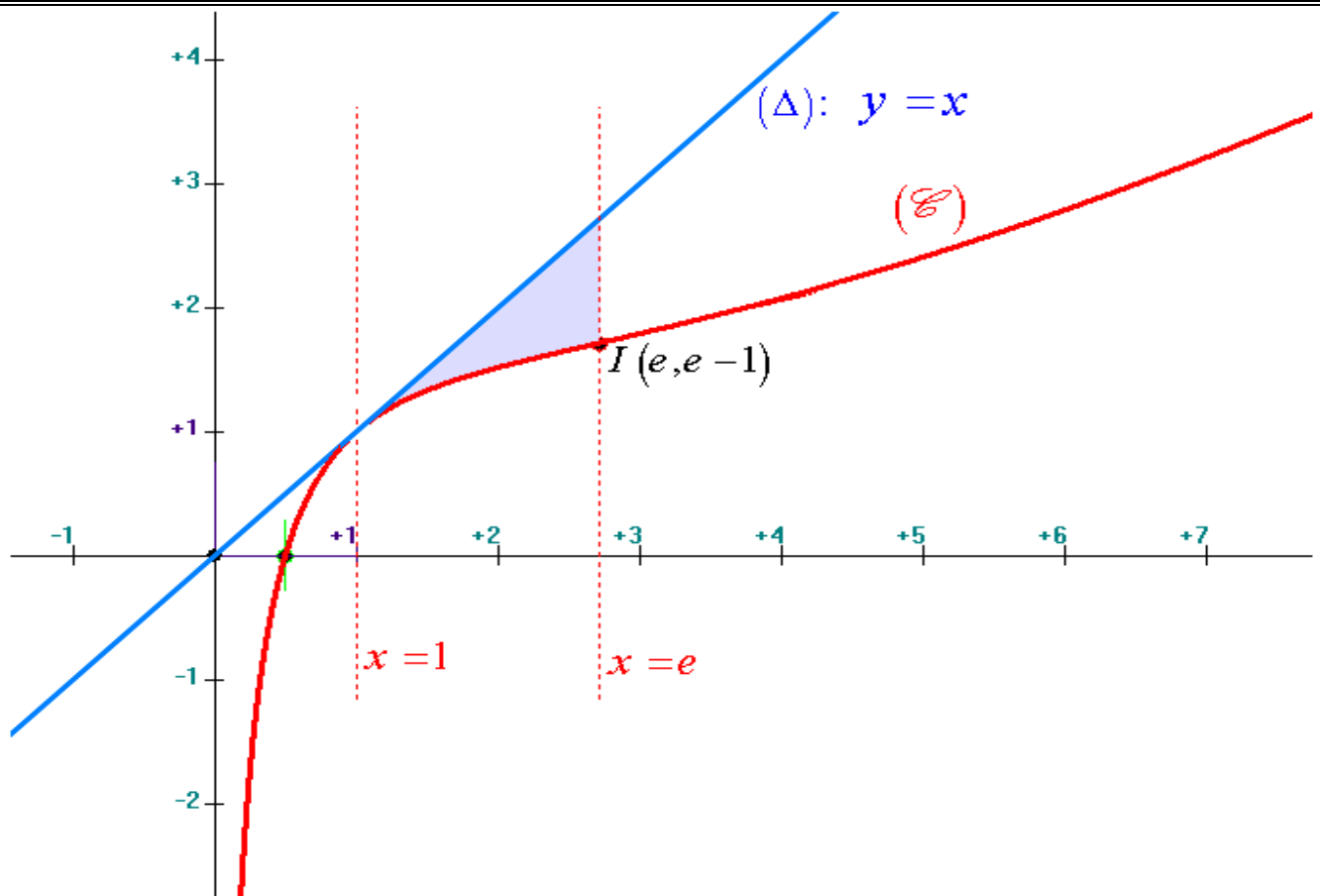
$$f := x \rightarrow x - \ln(x)^2$$

> **A:=Int(abs('f'(x)-x),x=1..exp(1))=int(abs(f(x)-x),x=1..exp(1));**

$$A := \int_1^e |-f(x) + x| dx = e - 2$$

> **A:=evalf(rhs(A),20);**

$$A := .7182818284590452354$$



تمثيل الحدود الستة الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل باستخدام Archimède II :

