Éléments de réponses et barème du test $N°1$ - 13 Décembre 2019 -

Tronc Commun Sciences

Exercice 1. .... **(6 pts)**

1. (**a**) Prouver que : $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ ..... **(1 pt)**

   (**b**) Montrer que : $x^4 + y^4 \geq 2$ et $x^2 + y^2 \geq 2$ .... **(3 pts)**

   (**c**) Conclure que : $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6 \geq 4$ .... **(1 pt)**

   (**d**) Prouver que 4 est la valeur minimale de l'expression $x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6$, avec $xy = 1$ qui est atteinte par exemple pour $x = y = 1$ .... **(1 pt)**

2. — **Toute autre méthode complète et correcte** .... **(6 pts)**

   — **Toute autre méthode partiellement correcte** .... **($\leq$ 3 pts)**

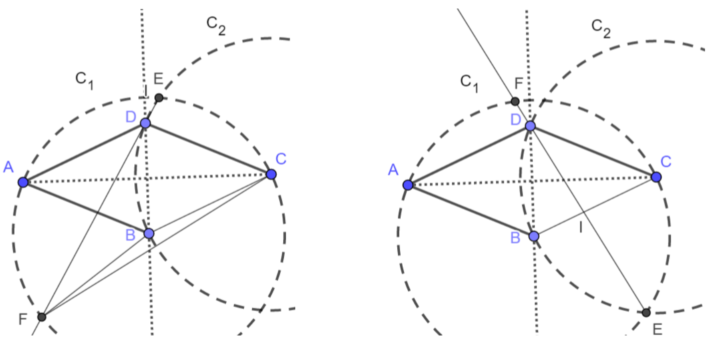
   — **Toute tentative incorrecte pour résoudre le système** .... **(0 pt)**

Exercice 2. .... **(7 pts)**

Remarques :

(**a**) Pour les condidats qui ont adopté la configuration gauche ci-dessous, le calcul de la mesure de l'angle $[\widehat{AFB}]$ passe par le calcul de $\widehat{AFE}$ et $\widehat{BFE}$, puisque $\widehat{AFB} = \widehat{AFE} + \widehat{BFE}$.

(**b**) Pour les condidats qui ont adopté la configuration droite ci-dessous, le calcul de la mesure de l'angle $[\widehat{AFB}]$ passe aussi par le calcul de $\widehat{AFE}$ et $\widehat{BFE}$, puisque $\widehat{AFB} = \widehat{AFE} - \widehat{BFE}$.



N.B : Ci-dessous, le calcul de la mesure de l'angle $[\widehat{AFB}]$, est adapté à la figure de gauche. Un raisonnement similaire permet d'obtenir la mesure de l'angle $[\widehat{AFB}]$ pour l'autre configuration.

1. (**a**) Prouver que : $\widehat{AFE} = \widehat{ACE}$ et $\widehat{BFE} = \widehat{BEF}$ .... (**2 pts**)

   (**b**) Prouver que : $\widehat{BFE} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \widehat{ACB}$ .... (**2 pts**)

   (**c**) Prouver que : $\widehat{AFB} = \widehat{ECB}$ .... (**2 pts**)

   (**d**) Conclure que : $\widehat{AFB} = 60°$ .... (**1 pt**)

2. **Toute autre méthode complète et correcte** .... (**7 pts**)

3. **Toute autre méthode partiellement correcte** .... (**$\leq$ 3 pts**)

4. **Toute tentative incorrecte de résoudre l'équation (E)** .... (**0 pt**)

Exercice 3. .... (**7 pts**)

Soient a, b, c et d les quatre petits diviseurs de $n \in 2\mathbb{N}^\star$, tels que $a < b < c < d$ et $n = a^2+b^2+c^2+d^2$.

1. (**a**) Remarquer que $a = 1$ et $b = 2$ .... (**1 pt**)

   (**b**) Prouver que si $4 \mid n$ alors l'un des nombres c et d est égale à 4 et l'autre est un nombre impair .... (**1 pt**)

   (**c**) En déduire que 4 ne peut pas diviser l'entier n .... (**2 pts**)

   (**d**) Prouver que c ne peut pas être pair et en déduire que d est un nombre pair, plus précisement $d = 2c$ .... (**2 pts**)

   (**d**) Montrer que $c = 5$, $d = 10$ et $n = 130$ .... (**1 pt**)

2. **Toute autre méthode complète et correcte** .... (**7 pts**)

3. **Toute autre méthode partiellement correcte** .... (**$\leq$ 3 pts**)

4. **Toute tentative incorrecte** .... (**0 pt**)