Lycée Med Ben Hassan El ouazzani Khemisset	Année scolaire 2018/2019	
	Mathématiques	Ali Cherif
Niveau : 2éme Bac Sm Bac Int	Date : 12/1/2019	Durée : 2 heures
	Contrôle N° 4 1er semestre	

Exercice 1 : Questions indépendantes (9pts)

1pt 1) Ecrire sous forme algébrique le nombre :

$$Z=(1+i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2-(1+3i)\left(\frac{2+i}{1-i}\right)+6$$

1pt 2) Résoudre dans C^2 le systéme : $\begin{cases}3z-z'=-11\\ iz+(1+i)z'=3(4-i)\end{cases}$

1pt 3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$\frac{iz}{z-2}$ est un réel .

1pt 4) On considère le nombre complexe $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que pour tout $n\in Z$: $j^{2n}-j^{n}\in i.IR$

1pt 5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

$0\prec|z-1+i|\leq 4$

1,5pt 6) Soit f l'application du plan complexe P vers P et qui associe à tout point M d'affixe $z\in C-\{i\}$ le point M' d'affixe z'

tel que : $f(z)=z'=\frac{1-iz}{z-i}$

Montrer que si le point M varie sur le cercle (C) de centre A(i) et de rayon 4, alors le point M' varie sur un cercle (C') dont on Déterminera le centre et le rayon.

1pt 7) Ecrire sous forme trigonométrique le nombre :

$$Z=\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right)}{\left(\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\right)+i\left(\cos(\alpha)-\sin(\alpha)\right)}\quad \text{avec } \alpha\in IR.$$

8) Pour tout $\alpha\in]0;2\pi[$, on pose : $G(\alpha)=\frac{i\left(1-e^{i\alpha}\right)}{\sqrt{3}.e^{i\alpha}}$

1pt a – Montrer que : $G(\alpha)=\frac{2}{\sqrt{3}}.\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).e^{-i\frac{\alpha}{2}}$

0,5pt b – Calculer : $\left(G\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{12}$

Cherif Ali

Exercice 2 : (10pts)

I) On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \quad ; f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right).e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad f(0)=0$$

Soit (C) la courbe rerèsentative de f dans un RON $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$.

0,5pt 1) a – Montrer que f est continue à droite en 0.

0,5pt b – Montrer que f est dérivable à droite en 0.

1pt c – Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,75 2) a – Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donner une int érprètation du résultat.

0,75 b – Donner le tableau de variation de f.

0,75 3) a – Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion I.

0,75 b – Tracer la courbe (C) .on prend $(f(1)=0,7 \text{ et } 4e^{-3}=0,2)$

0,5pt II) 1 – a – Montrer que : $(\forall n \in IN^*)\ (\exists! a_n \in]0;+\infty[) : f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$

0,5pt b – Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est strictement croiassante .

0,5pt c – Montrer que : $(\forall n \in IN^*) : -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$

0,5pt 2) a – Montrer que : $(t \in [0;+\infty[) \quad 1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$

1pt b – En déduire que : $(\forall x \in [0;+\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x+\ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

3) Soit n un entier naturel supèrieur ou égal 4.

0,5pt a – Montrer que $a_4 \geq 1$ puis déduire que $a_n \geq 1$.

(on admet que $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$)

0,5pt b) Montrer que : $1-\frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$

0,5pt c) Montrer que : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$.

1pt d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\sqrt{\frac{2}{n}}$.

Cherif Ali