Cours du soir	Session intensive	Devoir Blanc
Secret of success	Avril 2012	2^{EM} Bac Sc Mat

التمرين رقم 01:

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $u_n = \underbrace{11...1}_{n \text{ مرة}}$.

1)- تحقق أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);9u_n=10^n-1$.

2)- أثبت أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);u_n\equiv 0[7]\Leftrightarrow n\equiv 0[6]$.

3)- إستنتج أصغر عدد صحيح طبيعي u_n يقبل القسمة على 63 .

التمرين رقم 02:

⇦ ليكن p من $\mathbb{Z}$ بحيث : $p\neq 1$.

و لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $S_n=1+p+p^2+...+p^{n-1}$.

1)- أ- تحقق أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);S_n=\frac{1-p^n}{1-p}$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);p^n\wedge(1-p)=1$.

2)- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E_n): p^nx+(1-p)y=p$.

أ- تحقق أن مجموعة حلول المعادلة (E_n) غير فارغة .

ب- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E_n) .

ج- إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(F_n):10^nx-2^{n+2}y=10\times 2^{n-1}$.

التمرين رقم 03:

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}$ ، نضع : $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.

1)- أ- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية .

ب- إستنتج أن $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة نحو عدد حقيقي L ، حيث $0\le L\le 1$.

2)- ليكن $a\in]0;1[$.

أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);I_n\le a+(1-a)(1-a^2)^n$.

ب- إستنتج أن : $L\le a$ ، ثم حدد قيمة L .

3)- أ- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});I_{n+1}=\frac{2n+2}{2n+3}\times I_n$.

ب- إستنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N});I_n=\frac{2^{2n}\times(n!)^2}{(2n+1)!}$.

التمرين رقم 04:

⇦ المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

لكل $m\in\mathbb{C}$ ، نعتبر التحويل f_m الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث :

$z'=(im-1)z+m$.

1)- أ- حدد m لكي يكون التحويل f_m إزاحة .

ب- حدد قيم m التي يكون لأجلها التحويل f_m تحاكيا (محددا نسبته و لحق مركزه) .

2)- أ- بين أن التحويل f_m يكون دورانا إذا و فقط إذا كان :

$m=e^{i\theta}-i$ ، حيث $\theta\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

ب- نفترض أن : $\theta\equiv 0[2\pi]$ ، اعط العناصر المميزة للدوران f_m ، ثم أكتب التمثيل العقدي للدوران العكسي f_m^{-1} .

3)- لكل $z\in\mathbb{C}$ ، نضع : $z'=iz+1-i$.

أ- حدد على الشكل الجبري الجذور المكعبة ل $a=-1$.

ب- بين أن : $(z')^3+1=0\Leftrightarrow z^3-3(1+i)z^2+6iz+2-i=0$.

ج- حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):z^3-3(1+i)z^2+6iz+2-i=0$.

د- لتكن A و B و C صور حلول المعادلة (E) في المستوى العقدي (P) .

⇦ بين أن مجموعة النقط $M(z)$ من (P) بحيث : $|iz+(1-i)|=1$ هي الدائرة المحيطة بالمثلث ABC ، ثم أنشيء في المستوى (P) المثلث ABC و الدائرة المحيطة به .

التمرين رقم 05:

⇦ لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، و f_n الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$(\forall x\in\mathbb{R}); f_n(x)=n(2-x)e^x-1$.

1)- أ- أحسب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$.

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f_n .

2)- أ- بين أن المعادلة : $(E_n): f_n(x)=0$ تقبل حلين إثنين α_n و β_n في $\mathbb{R}$ بحيث :

$\alpha_n<1<\beta_n<2$.

ب- ضع جدولا تحدد فيه إشارة الدالة f_n على $\mathbb{R}$.

2)- أ- أدرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على $\mathbb{R}$.

ب- إستنتج رتابة كل من المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3)- أ- تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*);2-\beta_n=\frac{1}{n}e^{-\beta_n}$.

ب- بين أن المتتالية $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ متقاربة و أحسب نهايتها .

4)- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ غير مصغورة ، ثم إستنتج نهايتها (معللا جوابك) .

■ **التمرين رقم 06:**

⇦ لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$F(0)=\ln 3 \text{ و } (\forall x\in\mathbb{R}^*);F(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}dt .$$

1)- أدرس زوجية الدالة F .

2)- حدد إشارة كل من $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ و $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3)- أ- بين أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F(x)=\ln 3-2\times\int_x^{3x}\frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t}dt$.

ب- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});-2x^2\le F(x)-\ln 3\le 0$.

ج- أدرس إتصال و قابلية إشتقاق الدالة F على اليمين في الصفر .

4)- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F(x)=\frac{\sin(3x)-\sin x}{3x}+\int_x^{3x}\frac{\sin(t)}{t^2}dt .$$

ب- إستنتج أن : $(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});|F(x)|\le\frac{2}{x}$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

4)- أ- بين أن F قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^{*+}$ ، و أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+});F'(x)=\frac{\cos(3x)-\cos x}{x} .$$

ب- بين أن المعادلة : $(\mathrm{E}):F(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left]\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right[$.

⇦ **تمرين إضافي:**

■ ليكن $a\in\mathbb{N}^*$ بحيث يكون العدد $4a^2+1$ غير أولي .

بين أنه : $\left(\exists(m,n)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right);4a^2+1=(4m+1)\times(4n+1)$ (يمكنك إستعمال مبرهنة فيرما) .

Bon courage et bonne chance