التمرين رقم 1 :

1)- بسط الأعداد الآتية : $a=\ln\left(\frac{1}{x}\right)+3\ln x$ ؛ $b=\ln x+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$ ؛ $c=\ln\left(x\sqrt{x}\right)-2\ln x$.

2)- ليكن x عنصرا من المجال $]0;+\infty[$. اثبت المتساويات الآتية :

$\ln(x+5)=\ln\left(1+\frac{5}{x}\right)+\ln x$ ؛ $\ln\left(x^2+1\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\ln x$ ؛ $\ln\left(x^2-2x+1\right)=2\ln(x)+\ln\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$.

3)- حل في المجال $]0;+\infty[$ ما يلي : $\ln x=0$ ؛ $2\ln x-2=0$ ؛ $7\ln x-3=0$ ؛ $(\ln x-3)(\ln x-2)=0$ ؛ $\ln^2 x-2\ln x=0$.

$\ln(3x)-\ln(2x+2)=0$ ، $\ln\left(x^2+1\right)=\ln(x+2)+\ln x$ ، $\ln^2 x-4\ln x-5=0$.

4)- احسب $f'(x)$ مشتقة الدالة f في كل حالة : $f(x)=\ln\left(x^2-2x+2\right)$ ؛ $f(x)=x-\ln(x-1)$ ؛ $f(x)=\left(x^2-1\right)\ln(x)$

$f(x)=x-3+\frac{\ln(x)}{x}$ ؛ $f(x)=x-(\ln x)^2$ ؛ $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ ؛ $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ؛ $f(x)=\sqrt{x-2\ln x}$.

التمرين رقم 2 :

1)- احسب النهايات التالية : $l_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2018$ ؛ $l_2=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-\frac{1}{x}$ ؛ $l_3=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-2\ln x$ ؛ $l_4=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)\ln x$

$l_5=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-3)\ln x$ ؛ $l_6=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)\ln x$ ؛ $l_7=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-3x+3\right)\ln x$ ؛ $l_8=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ ؛ $l_9=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{4x+1}{5x+1}\right)$

$l_{10}=\lim\limits_{x\to+\infty}2x+1+\frac{1}{\ln x}$ ؛ $l_{11}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-2x+\ln(x)$ ؛ $l_{12}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3-2-3\ln(x)$ ؛ $l_{13}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-2+\ln(x)}{x^4}$ ؛ $l_{14}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\ln(x)}{x^2}$

$l_{15}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+(x-2)\ln(x)}{x+1}$ ؛ $l_{16}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2-\ln^2(x)$ ؛ $l_{17}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x-3$ ؛ $l_{18}=\lim\limits_{x\to0^+}2x-\ln x$ ؛ $l_{19}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln x-\frac{1}{x}$ ؛

$l_{20}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$ ؛ $l_{21}=\lim\limits_{x\to0^+}(x-3)\ln x$ ؛ $l_{22}=\lim\limits_{x\to0^+}2x-(\ln x)^2$ ؛ $l_{23}=\lim\limits_{x\to0^+}2x-\frac{(\ln x)^2}{x}$ ؛ $l_{24}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^2-2x\right)(\ln x)$

؛ $l_{25}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x^3-x\right)(\ln x)$ ؛ $l_{26}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}+\ln x$ ؛ $l_{27}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{2x-(\ln x)^2}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}{x\ln(x)}$.

2)- بوضع $t=\sqrt{x}$ احسب كل نهاية مما يلي : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln x$ ؛ $\lim\limits_{x\to0^+}x(\ln x)^2$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(1+\ln x)^2}{x}$.

التمرين رقم 3 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-2\ln x$.

1- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.

2- بين أن $g'(x)=\frac{x-2}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g .

3- استنتج أن $g(x)\succ0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=\ln x-x-1$.

1- احسب النهايتين $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$.

2- بين أن $h'(x)=\frac{1-x}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات h .

3- استنتج أن $h(x)\prec0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

4- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}$.

التمرين رقم 4 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-\ln x+1$.

1- أ- بين أن $g'(x)=\frac{x-1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب-استنتج أن g تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]0;1]$.

2- بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II-نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=\ln x+\frac{\ln x}{x}$.و (C) منحناها في معلم م. م $(O;\vec{u};\vec{v})$

1-أحسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: و $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2-بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

3- اكتب معادلة المماس ل (C) عند النقطة التي أفصولها 1 .

4- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]\frac{1}{e};1\right[$.

5-بين أن $f''(x)=\frac{2\ln x-x-3}{x^3}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

التمرين رقم 5 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2x^2-\ln x+1$.

1- أحسب النهايتين $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

2- بين أن $g'(x)=\frac{(2x-1)(2x+1)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

3-ضع جدول تغيرات g .

4- بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=2x+1+\frac{\ln x}{x}$. (C) منحنى f .

1- بين أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ و أول هذه النتيجة هندسيا .

2- أ-أحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب-بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$.

ج- ادرس الوضع النسبي ل (C) و المستقيم (Δ) .

3-أ-بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

ج-ضع جدول تغيرات f .

4- أ-تحقق من أن $f\left(\frac{1}{2}\right)=2(1-\ln 2)$.

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;+\infty[$ وان $\frac{1}{4}\prec\alpha\prec\frac{1}{2}$. (نقبل أن $f\left(\frac{1}{4}\right)\prec 0$)

5- اكتب معادلة المماس ل (C) عند النقطة $A(1;3)$.

6-أ-بين أن $f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- ادرس تقعر (C) ثم أنشئ (C) .

التمرين رقم 6 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x+2$.

1)- احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+}g(x)$.

2)- بين أن $g'(x)=\dfrac{2x^2-2}{x}$ لكل x من I .

3)-ضع جدول تغيرات g ثم بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من I .

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=x-2+2\dfrac{\ln x}{x}$. (C) منحناها في معلم متعامد م $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1)- احسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

2)- احسب $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ و أول النتيجة هندسيا .

3)- أ-بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x-2$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$.

ب- ادرس الوضع النسبي ل (C) و المستقيم (Δ) .

4)-بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من I ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على I وضع جدول تغيراتها .

5)- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في I وان $1\prec\alpha\prec 2$.

6)- اكتب معادلة المماس ل (C) عند النقطة التي أفصولها 1 .

7)-بين أن $f''(x)=\dfrac{4\ln x-6}{x^3}$ لكل x من I ثم استنتج نقطة انعطاف (C) وأنشئ (C) .

8)-بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .

التمرين رقم 7 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x-2\ln x$.

1)- احسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+}g(x)$.

2)- بين أن $g'(x)=\dfrac{x-2}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن g تزايدية على $[2;+\infty[$ وتناقصية على $]0;2]$.

3)- بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II-نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x-(\ln x)^2$. و (C) منحناها في معلم .م .م $(O;\vec{u};\vec{v})$

1)- احسب النهاية $\lim_{x\to 0^+}f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

2)-أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) ثم استنتج أن $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

ب-ادرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$.

ج-بين أن (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ على المجال $]0;+\infty[$.

3)-أ-بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب-استنتج أن f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .

4)-بين أن (Δ) هو المستقيم المماس ل (C) عند النقطة التي أفصولها 1 .

5)-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وان $\dfrac{1}{e}\prec\alpha\prec 1$.

6)- أنشئ (C) .

7)- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .

التمرين رقم 8 :

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2\ln x-2x$.

1- احسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2- احسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرات g .

3- بين أن $g(x)\prec 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(\ln x)^2-2x+1$. (C_f) منحنى f .

1- احسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2- أ- بوضع $T=\sqrt{x}$ بين أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ثم استنتج أن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.

ب- بين أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=-2$ ثم احسب $\lim_{x\to +\infty}[f(x)+2x]$ وأول النتيجة هندسيا .

ج- بين أن (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2x$ على المجال $]0;+\infty[$.

3- أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ ثم جدول تغيراتها.

4- اكتب معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة التي أفصولها 1 .

5- أ- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وان $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$.

ب- بين أن $f(x)\geq 0$ لكل x من $[\alpha;+\infty[$ وان $f(x)\leq 0$ لكل x من $]0;\alpha]$. (لاحظ أن $f(\alpha)=0$)

6- أ- بين أن $f''(x)=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ادرس تقعر (C_f) و أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم .

التمرين رقم 9 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2\ln x-2x+1$.

1- بين أن $\lim_{x\to +\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$.

2- احسب $g'(x)$ لكل x من I ، ثم ضع جدول تغيرات g .

3- بين أن $g(x)\prec 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=(\ln x)^2-2x+\ln x$. (C_f) منحنى f .

1- بين أن $\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ ثم أول هذه النتيجة هندسيا .

2- أ- بين أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) .

ب- استنتج أن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$ وان $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=-2$.

ت- احسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)+2x$ واستنتج أن (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا ينبغي تحديد اتجاهه .

ج- ادرس الوضع النسبي ل (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-2x$ على I .

3- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن f تناقصية قطعا على $]0;+\infty[$ و ضع جدول تغيراتها.

4- بين أن $y=-x-1$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس ل (C) عند النقطة $A(1;-2)$.

5- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وان $\frac{1}{e}\prec\alpha\prec 1$.

6- احسب $f''(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة يتم تحديدها.

7- أنشئ المستقيمين (T) و (Δ) ثم (C) في نفس المعلم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

التمرين رقم 10 :

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=2\ln x+1-\frac{1}{x^2}$.

1- إحسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2- بين أن $g'(x)=\frac{2(x^2+1)}{x^3}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن g تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

3- بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ وأن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$كما يلي : $f(x)=1+(x^2-1)\ln x$. (C_f)منحنى f .

1- إحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2- أ- إحسب النهاية $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب- بين أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا .

3-أ-بين أن $f'(x)=xg(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$وتناقصية على المجال $]0;1]$.

ج- جدول تغيرات f ثم استنتج أن $f(x)\geq 1$ لكل x من $]0;+\infty[$.

4- أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم .

التمرين رقم 11 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2\ln x-x$.

1)- إحسب النهايتين $\lim_{x\to +\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

2)-بين أن $g'(x)=\frac{2-x}{x}$ لكل x من I ، ثم ضع جدول تغيرات g على I .

3)-بين أن $g(x)\prec 0$ لكل x من I .

II- نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $h(x)=x^3+x-4\ln x+2$.

1)- إحسب النهايتين $\lim_{x\to +\infty} h(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} h(x)$.

2)-بين أن $h'(x)=\frac{(x-1)(3x^2+3x+4)}{x}$ لكل x من I .

3)-استنتج أن إشارة $h'(x)$ هي إشارة $x-1$ ثم ضع جدول تغيرات h .

4)- بين أن $h(x)\succ 0$ لكل x من I .

III-نعتبر الدالة f المعرفة على I بما يلي : $f(x)=x+2+\frac{2\ln x-x}{x^2}$.و (C) م في م .م .م $(O;\vec{u};\vec{v})$(الوحدة $2cm$) .

1)- إحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

2)-أ-إحسب $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب-بين أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل ل (C)بجوار $+\infty$.

ج-بين أن (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على I (استعن بنتيجة - 3- I) .

3)-أ-بين أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^3}$ لكل x من I ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على I .

ب- ضع جدول تغيرات f .

ج- اكتب معادلة المماس ل (C)عند النقطة $C(1;2)$.

4)-بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في I وأن $\frac{1}{e}\prec\alpha\prec 1$. 5)- أنشئ (C) .

التمرين رقم 12 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-1+\ln x$.

1)- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to0^+} g(x)$.

2)-بين أن $g'(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ، واستنتج أن g تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$.

3)-بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ وأن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

⇦ طريقة ثانية لدراسة إشارة $g(x)$:

4)-أ-بين أن $2\ln x$ و $2(x^2-1)$ لهما نفس الإشارة على المجال $[1;+\infty[$ واستنتج أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$.

ب- بين أن $2\ln x$ و $2(x^2-1)$ لهما نفس الإشارة على المجال $]0;1]$ واستنتج أن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x^2-2\ln x+(\ln x)^2$.

1)- بين أن $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ وأول هذه النتيجة هندسيا .

2)- بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم أن $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ واعط التأويل الهندسي .

3)- أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{2g(x)}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ وأول هندسيا النتيجة $f'(1)$.

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]0;1]$

ج- ضع جدول تغيرات f واستنتج أن $f(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم أنشئ (C) .

التمرين رقم 13 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^2-2\ln x$.

1)- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to0^+} g(x)$.

2)- أحسب $g'(x)$ لكل x من I ، ثم ضع جدول تغيرات g .

3)-بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من I.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=x-\dfrac{(\ln x)^2}{x}$ و(C) م في م .م .م $(O;\vec{u};\vec{v})$(الوحدة $2cm$) .

1)- أحسب النهاية $\lim_{x\to0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

2)-أ-بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (يمكن وضع $t=\sqrt{x}$) .

ب- أحسب $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x)$ وأول النتيجة هندسيا .

ج- بين أن (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على I .

3)-أ-بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)+(\ln x)^2}{x^2}$ لكل x من I .

ب- استنتج أن f تزايدية على I وضع جدول تغيراتها .

4)- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في I وأن $\dfrac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$.

5)-بين أن المستقيم (Δ) هو المماس ل (C) عند النقطة $A(1;1)$.

6)- أنشئ (C) .

III-نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N و $u_0=e$.

1)-بين بالترجع أن $u_n\geq 1$ لكل n من N .

2)-بين أن $(u_n)_{n\geq0}$ تناقصية .

3)-استنتج أن $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .

التمرين رقم 14 :

I- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $I =]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=x^3-1+2\ln x$.

1)- أحسب النهايتين $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)$.

2)-بين أن $g'(x)=\dfrac{3x^3+2}{x}$ لكل x من I ، ثم استنتج أن g تزايدية قطعا على I .

3)-بين أن $g(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ وأن $g(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال I بما يلي : $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x^2}$. (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1)- أحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

2)-أ-أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x)$ وأول النتيجة هندسيا .

ج-أدرس الوضع النسبي ل (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ على I .

3)-بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^3}$ لكل x من I ثم ضع جدول تغيرات f .

4)-أ-بين أن $f''(x)=\dfrac{5-6\ln x}{x^4}$ لكل x من I .

ب- استنتج أن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة يتم تحديدها ثم أنشئ (C) .

III-نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N و $u_0=e$.

1)-بين بالترجع أن $u_n\geq 1$ لكل n من N .

2)-بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية واستنتج أنها متقاربة ثم حدد نهايتها .

التمرين رقم 15 :

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\ln x$.

1- أحسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

2- بين أن $g'(x)=\dfrac{x-1}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرا ت g .

3- بين أن $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(x+1)^2-(\ln x)^2$. (C_f) منحنى f .

1- أحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2- أ- بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ثم ادرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$.

3-أ-بين أن $f'(x)=\dfrac{2[x^2+g(x)]}{x}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- استنتج أن f تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .

4- اكتب معادلة المماس ل (C_f) عند النقطة التي أفصولها 1 .

5- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وأن $\dfrac{1}{4}\prec\alpha\prec 1$.

6- أ-بين أن $f''(x)=\dfrac{2(x^2-1+\ln x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$

ب- بين أن $x^2-1+\ln x\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ وأن $x^2-1+\ln x\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

ج- ادرس تقعر (C_f) ثم أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم .

7- بين أن $f'(\alpha)=\dfrac{2(\alpha+1)^2}{\alpha}$.

التمرين رقم 16 :

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=x-\ln x$.

1- أحسب النهايتين $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ ؛ $\lim_{x\to +\infty} g(x)$.

2- أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيرا ت g .

3- استنتج أن $g(x)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II-نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $h(x)=x+\ln x-1$.

1- أحسب $h'(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج أن h تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$.

2- استنتج أن $h(x)\geq 0$ لكل x من $[1;+\infty[$ وان $h(x)\leq 0$ لكل x من $]0;1]$.

III-نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x+1$. (C_f) منحنى f .

1- أحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة المحصل عليها هندسيا .

2- بين أن $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ وأول هذه النتيجة هندسيا .

3-أ-بين أن $f(x)-x=\left(\frac{1-x}{x}\right)g(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب-ادرس إشارة $f(x)-x$ على $]0;+\infty[$ ثم استنتج الوضع النسبي ل (C_f) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$.

4-أ- بين أن $f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $[1;+\infty[$ وتناقصية على المجال $]0;1]$.

ت- احسب $f'(1)$ ثم أول النتيجة هندسيا وضع جدول تغيرات f .

5-أنشئ (C_f) في معلم متعامد ممنظم .

6- حدد مبيانيا عدد حلول المعادلة $x^2-(x-1)\ln x=0$ في المجال $]0;+\infty[$.

7-نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N و $u_0=e$.

أ-بين بالترجع أن $u_n\geq 1$ لكل n من N .

ب-بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ تناقصية (يمكن استعمال نتيجة السؤال 3-أ- <u>الجزء الثالث</u>)

ج-استنتج أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .

التمرين رقم 17 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+2\ln(x+1)-2\ln x$. و(C_f) منحنى f .

1)- أحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا .

2)-أ-بين أن $f(x)=x+2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ب- بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل ل (C_f) بجوار $+\infty$.

ج-بين أن (C_f) يوجد فوق المستقيم (Δ) على $]0;+\infty[$.

3)-أ- بين أن $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ لكل x من R .

ب- بين أن $f'(x)=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x+1)}$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ج- بين أن إشارة $f'(x)$ على المجال $]0;+\infty[$ هي إشارة $x-1$.

د- ضع جدول تغيرات f ثم استنتج أن (C_f) لا يقطع محور الافاصيل .

التمرين رقم 18 :

I-نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0;+\infty[$ بما يلي : $g(x)=1-2x+\ln x$.

1-أحسب $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ ثم ضع جدول تغيرات g .

2-بين أن $g(x)\prec 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

II- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x(\ln x-x)\,;x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$. و ليكن (C_f) منحناها في م . م.ممنظم.

1-بين أن f متصلة على اليمين في الصفر.

2-ادرس قابلية اشتقاق f على يمين الصفرو أول النتيجة هندسيا .

3-أ-تحقق من أن $f(x)=x^2\left(\frac{\ln x}{x}-1\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- بين أن (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا ينبغي تحديد اتجاهه.

4- بين أن $f'(x)=g(x)$ لكل x من $]0;+\infty[$ ثم استنتج ضع جدول تغيرات f و أنشئ (C_f) .

التمرين رقم 19 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على R بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x^2+2x\ln(-x);x\prec 0 \\ f(0)=0 \\ f(x)=x-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right);x\succ 0 \end{cases}$ وليكن (C) منحناها في م .م. م $(O;\vec{u};\vec{v})$.

1-بدراستك لتغيرات الدالة $\varphi : x\to x+\ln(-x)+1$ على المجال $]-\infty;0[$ بين أن : $(\forall x\in]-\infty;0[);\varphi(x)\geq 0$

2-ادرس إتصال الدالة f في الصفر .

3-ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في الصفر ثم أعط التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها .

4-ادرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $-\infty$.

5)-أ-أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ وأول النتيجة هندسيا .

ب-ادرس الوضع النسبي ل (C) والمستقيم (Δ) الذي معادلته $y=x$ على $]0;+\infty[$.

6-ادرس تغيرات f على حيز تعريفها .

7-ادرس تقعر (C).

8- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$ وان $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$. ثم أنشئ (C) .

التمرين رقم 20 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x)=x-\ln(x+1)\,;x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ (C) منحنى f .

1-بين ان f متصلة في الصفر .

2-بين ان f قابلة للاشتقاق في الصفر وان $f'(0)=0$. (اذكر ان: $\lim_{u\to 0}\frac{\ln(u+1)}{u}=1$)

3-أ- بين ان $f(x)=x-\ln x-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ لكل x من $]0;+\infty[$.

ب-بين ان (C_f) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا ينبغي تحديد اتجاهه .

ج- بين ان (C_f) يوجد تحت المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ على المجال $]0;+\infty[$.

4- بين ان f تزايدية على المجال $[0;+\infty[$ ثم استنتج ان $x-\ln(x+1)\succ 0$ لكل x من $]0;+\infty[$.

5- انشئ (C_f) في المعلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6- بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده .

II-نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كما يلي : $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل n من N و $u_0=1$.

1-بين بالترجع أن $0\leq u_n\leq 1$ لكل n من N .

2- إدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. (يمكن إستعمال نتيجة I-4-ج) .

3- إستنتج أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

إدرس الدوال التالية : (مجموعة التعريف الفروع اللانهائية........)

1) $f(x)=\ln\left|x^2-x-2\right|$

2) $f(x)=\ln(1-\ln x)$

3) $f(x)=1-x+\ln(x+1)^2$

4) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)$

5) $f(x)=x-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

6) $f(x)=-\dfrac{1}{2x+1}+\ln\dfrac{x+1}{x}$

7) $f(x)=\dfrac{x}{3}+\ln x-\ln(x-4)$

8) $f(x)=\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

9) $f(x)=(x-2)+(x-1)\ln\dfrac{1}{|x-1|}$

10) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)}$

11) $f(x)=x(-1+\ln x)+\dfrac{1+\ln x}{x}$

12) $f(x)=(x-1)\ln\dfrac{x}{x-1}+\ln x$

بالتوفيق و النجاح للجميع

للمزيد من التمرين و الشروحات :

https://www.facebook.com/groups/monbac2018